



Research Article

توجيه وتحكم مبتكر ثلاثي الأبعاد باستخدام تقنية المطاردة المنزلقة للصواريخ أرض-جو بخيتي بلقاسم¹، نايل البشير²، حسين لوبار³، و كمال حريش³

¹معهد الطيران والدراسات الفضائية بجامعة البليدة، الجزائر

²كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة الجلفة، الجزائر

³مختبر الأنظمة والإشارة بمعهد الهندسة الكهربائية والإلكترونيك بجامعة بومرداس، الجزائر

Citation : BEKHITI Belkacem, Nail B, Loubar H and Hariche K, (2025), (A Novel 3D Sliding-Pursuit Guidance and Control of SAM Missiles), *Revue Nature et Technologie*, 17 (1) (2025) : 59-81.
<https://www.asjp.cerist.dz/en/PresentationRevue/47>

ملخص

شهد مجال توجيه الصواريخ والتحكم فيها تطورًا جذريًا على مدى الثلاثين عامًا الأخيرة، حيث ظهرت العديد من التقنيات والأساليب التي تهدف إلى تحقيق دقة عالية في اعتراض الأهداف، حتى في ظل وجود بيانات مليئة بالضوضاء وعدم اليقين. تعتمد أنظمة توجيه الصواريخ على مجموعة من الخوارزميات والقوانين من أبرزها المطاردة الصرفة (Pure Pursuit - PP)، والتحكم بخط البصر (Command to Line of Sight - CLOS)، والملاحقة التناسبية (Proportional Navigation - PN)، وجميعها تركز على إنشاء خط رؤية (Line of Sight - LOS) بين مستشعر التتبع والهدف. في هذا العمل، نعرض قانون توجيه مبتكر يعتمد على المطاردة المنزلقة ثلاثية الأبعاد، مصمم للتحكم في صواريخ أرض-جو ضد أهداف مناورة. ولتقييم فعالية وأداء الخوارزمية الجديدة نقارنها مع قوانين التوجيه المتاحة مثل (Zero Effort Miss-Distance ZEM) و D-PP3، مع التركيز على دقة الإصابة وزمن الوصول. تؤكد النتائج كفاءة القانون الجديد و تفوقه على الطرق الحالية.

الكلمات المفتاحية: توجيه المطاردة المنزلقة، تحسين السرب الجزيئي، صاروخ أرض-جو، هدف مناور، الملاحقة التناسبية، توجيه المطاردة الصرفة

A Novel 3D Sliding-Pursuit Guidance and Control of SAM Missiles

Abstract

The field of missile guidance and control has undergone significant advancements over the past thirty years, with numerous techniques and methods emerging to achieve high-precision target interception, even in noisy and uncertain environments. Missile guidance systems rely on a range of algorithms and laws, among which the Pure Pursuit (PP), Command to Line of Sight (CLOS), and Proportional Navigation (PN) are the most prominent. All of these approaches are based on establishing a Line of Sight (LOS) between the tracking sensor and the target. In this work, we propose an innovative guidance law based on three-dimensional sliding pursuit, designed to control surface-to-air missiles against manoeuvring targets. To evaluate the effectiveness and performance of the new algorithm, we compare it with existing guidance laws such as Zero Effort Miss-Distance (ZEM) and D-PP3, with a focus on impact accuracy and time-to-intercept. The results confirm the efficiency of the proposed law and its superiority over current methods.

Keywords: Sliding pursuit guidance, PSO optimization, Surface-To-Air Missiles, Maneuvering target, Proportional navigation, Pure pursuit guidance

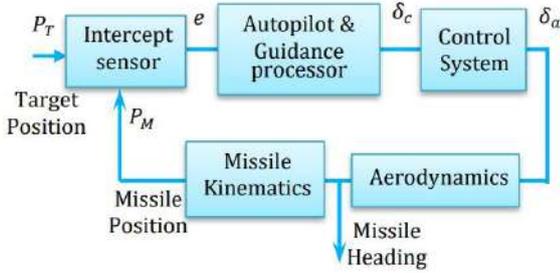
طيرانها. كما يتم تعريف نظام التوجيه الصاروخي على أنه مجموعة من المكونات والخوارزميات التي تقيس موقع الصاروخ الموجه بالنسبة لهدفه وتصحح مسار الرحلة كما هو مطلوب. ويشتمل نظام التوجيه الصاروخي

1. مقدمة في التوجيه الصاروخي

تُعرف الصواريخ الموجهة في بأنها تلك المركبات الغير مأهولة والتي بإمكانها أن تسبح في الفضاء وتحمل على متنها وسائل التحكم في مسار



الصاروخ و يحدد الطيار الآلي أمر التوجيه، يجب على نظام التحكم الصاروخي ضبط أسطح التحكم لإنتاج التسارع المطلوب لتصحيح مسار الطيران. يتم تطبيق هذا التسارع التصحيحي في اتجاه شاقولي (عمودي على مسار طيران الصاروخ) لتغيير اتجاه شعاع سرعة الصاروخ.



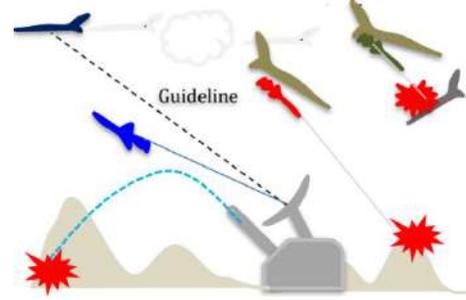
صورة 2: الحلقة المغلقة والشاملة للملاحة والتوجيه والتحكم بالصواريخ

تستخدم معظم الصواريخ الموجهة (الـ *tail, wing, canard, or*) *thrusters* للمناورة و التحكم في زواياها الرأسية لكن بعضها يستخدم مزيجاً من كل ما ذكر [2]. السؤال المطروح هو ماهية الإشارة التي يجب على المحركات تطبيقها على الاجنحة. وهذا هو الغرض من نظام التحكم، الذي يتكون من:

- الملاحة: هي الإجابة عن السؤال أين أنا؟ (تحديد وتخطيط المسار)
- التوجيه: أين أريد أن أكون؟ (ابحث عن الحالة المطلوبة لا اعتراض الهدف)
- التحكم: كيف أصل إلى هناك؟ (جعل الصاروخ يؤدي المهمة المطلوبة)

بمزيد من التفاصيل، يحدد جزء الملاحة الموقع الحالي من قياسات المستشعر. كما يحدد جزء التوجيه ما هو الوضع المطلوب و ما هو الخطأ في التوجه (أي بناءً على جزء التنقل). يحدد جزء التحكم المدخلات التي يجب تطبيقها على الصاروخ لتصحيح الخطأ و يرسل أمراً بذلك إلى المشغلات (المحركات). نظام التحكم هو العقل المدبر في أي عملية أتوماتيكية سواء كانت في مجال الفضاء، أو الميكانيك، أو الكهرباء، أو الميكاترونك، أو الكيمياء، إلخ... الغرض منه هو جعل النظام يؤدي المهمة المطلوبة. من أجل الحفاظ على هذا الغرض، يتم انحراف أسطح التحكم المتحركة بأوامر من نظام القيادة لتوجيه الصاروخ، أي أن نظام التوجيه سيضع الصاروخ على المسار المناسب لا اعتراض الهدف [5].

على مكونات الاستشعار والحوسبة والتوجيه و نظام الاستقرار والتحكم الأتوماتيكي (الآلي). ويتم أيضاً تصنيف الصواريخ الموجهة بشكل أساسي إلى أنواع وفئات مختلفة بناءً على مصدر الإطلاق والهدف [1]: سطح-جو و جو- سطح و سطح - سطح و أخيراً جو- جو (صورة 1).



صورة 1: أنواع الصواريخ وتصنيفاتها بناءً على الهدف والمسار

تشير كلمة ملاحة¹ في سياق التوجيه الصاروخي إلى عملية تحديد و تخطيط مسار الصاروخ من موقع معلوم إلى موقع الهدف المطلوب [2]. و في هذا الميدان يحتاج الصاروخ إلى اتباع المسار المخطط له، والذي يتضمن تعديل اتجاهه وسرعته بشكل مستمر حيث يأتي دور خوارزميات التوجيه مثل التحكم في مجال المتجهات. أما عن التوجيه² فهو مصطلح عام يصف الأجهزة والوظائف والعمليات المستخدمة لتوجيه الصاروخ لا اعتراض الهدف. لذلك نقول إن الإرشاد هو عملية توجيه مسار الجسم نحو نقطة معينة، والتي قد تكون متحركة بشكل عام. فإذا كانت النقطة المحددة ثابتة وكان الجسم الموجه مأهولاً، فإن عملية تحديد المسار وتخطيطه هي مجرد ملاحة أي إنها مجرد فئة فرعية من التوجيه.

قانون التوجيه³ هو الخوارزمية التي يتم من خلالها تنفيذ القاعدة الهندسية المطلوبة (صورة 2). فعندما يستشعر جهاز التحسس الموجود برأس الصاروخ⁴ خطأ الاعتراض اللحظي و يحدده، يقوم معالج التوجيه⁵ بعد ذلك بتحديد أوامر المناورة المناسبة، بناءً على قانون التوجيه، لتقليل الخطأ [3].

عملية المعالجة تتم من خلال حواسيب رقمية عالية الدقة موجودة على متن الصاروخ حيث بعد تحديد قانون التوجيه المناسب يقوم الطيار الآلي⁶ بإنشاء التحكم المطلوب ثم يرسل إشارات رقمية إلى مشغلات نظام التحكم لتحريف أسطح التحكم عن طريق المحركات الكهربائية أو الهيدروليكية [4]. بمجرد أن يحدد معالج التوجيه حجم و اتجاه الخطأ في مسار طيران

⁴ Seeker or Interception sensor

⁵ Guidance processor

⁶ Autopilot

¹ Navigation

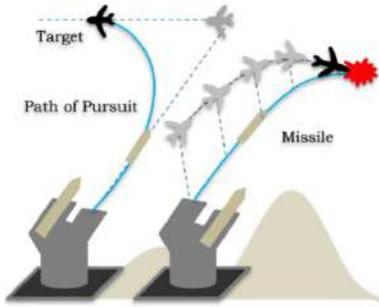
² Guidance: الإرشاد أو القيادة

³ Guidance law

في الصورة 3 تشير $\delta(t)$ إلى زاوية الانحراف بين خط الرؤية (LOS) و متجه سرعة المعترض وتشير $\lambda(t)$ إلى زاوية خط الرؤية بالنسبة للخط المرجعي⁷.

مسار المطاردة الخالصة: إن أبسط إجراء لصاروخ موجه نحو هدف متحرك هو تشخيص و توصيف مسار المطاردة بدقة، ثم يتجه الصاروخ على طول خط الإبصار في كل لحظة. بالتالي، فإن معدل دوران الصاروخ يساوي دائماً معدل دوران خط الرؤية و هذه هي بالضبط ما تسمى بالمطاردة الخالصة أو المباشرة. أما عن مسارات هذا النوع من المطاردة فإنها منحنية للغاية قرب نهاية الرحلة⁸.

مسار الملاحة الموازية⁹: يتم تحديده بواسطة القاعدة $\lambda(t) = \lambda(0)$ ، ويؤدي بشكل عرضي إلى شكل من أشكال الترميز الحركي لأن المطارد (المعترض) يبدو ثابتاً على خلفية بعيدة¹⁰. تصف الملاحة الموازية حقيقة أنه عندما يقترب الجسمان من بعضهما البعض في مسار تصادمي، فإن خط البصر لا يدور بالنسبة للعالم الخارجي (يمثل هنا خط المرجع). وهذا يعني أن زاوية الحمل λ ، المتكونة بين خط المرجع و LOS لا تتغير مع مرور الوقت (صورة 4).



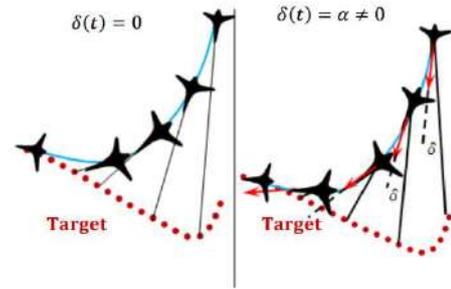
صورة 4: مسار كل من الملاحة بالمطاردة الخالصة والملاحة الموازية في تتبع الهدف

2. أنماط التوجيه الذاتي المختلفة في تسخير الصواريخ

يُطلق على نظام التوجيه اسم "homing" إذا اكتشف الصاروخ الهدف T وتتبعه بفضل الطاقة المنبعثة من هذا الأخير. إذا كان مصدر طاقة الهدف T نقي ومناسب، على سبيل المثال، البث الإذاعي، و

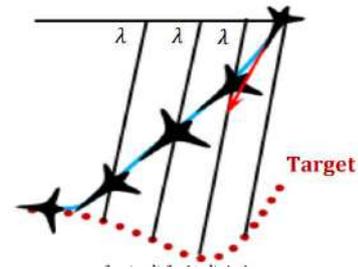
إن التتبع الصاروخي الموجه هو عملية ديناميكية للغاية، و الظروف التي تحدد مدى اقتراب الصاروخ من الهدف تتغير باستمرار و أحياناً بمعدل مرتفع للغاية و لذلك يقوم مستشعر التوجيه بقياس واحد أو أكثر من معلومات مسار الصاروخ بالنسبة للهدف. بناءً على قياسات المستشعر فإن هناك حاجة إلى عملية منطقية لتحديد تصحيحات مسار الرحلة المطلوبة و هذه العملية تسمى بقانون التوجيه، الغرض منه جعل الصاروخ يقترب قدر الإمكان من الهدف و في أقصر وقت ممكن [6].

من بين المخططات المختلفة و المتعددة في التوجيه الصاروخي نذكر: المطاردة الخالصة، المطاردة المنحرفة، الملاحة المتوازية، الملاحة التناسبية، التوجيه الشعاعي، و غيرها من الأساليب المعتمدة على نظرية التحكم الحديثة [7]. كما هناك أنواع عديدة لاعتراض الأهداف، و لكننا نوضح هنا بيانياً عدداً قليلاً منها، و هي: المطاردة الخالصة، و المطاردة المنحرفة، و الملاحة الموازية (صورة 3).



(أ) المطاردة الخالصة

(ب) المطاردة المنحرفة



(ج) الملاحة الموازية

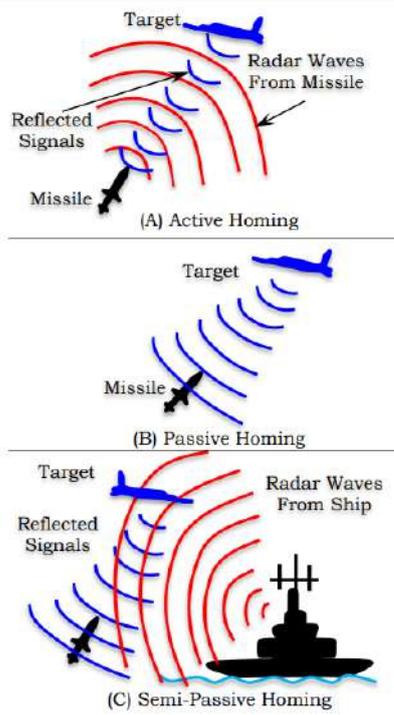
صورة 3: توضيح بياني لأنواع الملاحة و التوجيه الشهيرة لاعتراض الأهداف

⁹ Parallel Pursuit

¹⁰ يُسمى أيضاً اتجاه الهدف المطلق الثابت أو الاتجاه الثابت الزاوية

⁷ Angle of LOS to a reference line

⁸ هذه المنحنيات هي مسارات التتبع المباشر؛ وستتم مناقشة الأنواع الأخرى من مسارات التتبع لاحقاً



صورة 5: مخطط توضيحي لأنواع مختلفة من أنظمة التوجيه [السلبية و شبه السلبية و النشطة]

3. أنواع مختلفة من قوانين التوجيه

تكون الصواريخ ذات أهمية كبيرة عندما تكون الأهداف عبارة عن أشياء متحركة ديناميكياً. يتطلب القضاء على هدف متحرك عشوائي ذخائر ذكية بما يكفي للمناورة و المتابعة و المطاردة على أمل أن يقترب بما يكفي لإحداث الضرر. مع ذلك، فإن الأفعال "يتتبع" و "يطارد" تخفي وراءها الكثير من المهارة في التنفيذ.

تم تطوير العديد من الأنظمة المتطورة و المعقدة لتنفيذ قواعد التحكم في التوجيه الصاروخي و هي بالترتيب الزمني و التعقيد الرياضي تقريباً على النحو التالي [5]:

- المطاردة الخالصة (أو مجرد مطاردة)
- التتبع بخط الرؤية (المطاردة عبر شعاع الإبصار)
- الملاحة الموازية (التوجيه الثابت)
- الملاحة ذات الاقتراب الجيد و بأقل مناورة
- الملاحة التناسبية و هي الأشهر
- الملاحة الأمثل (على شكل فضاء الحالة)
- الملاحة الحديثة (كالملاحة القائمة على الذكاء الاصطناعي)

الضوضاء الصوتية، و الحرارة، و التوجيه يسمى سلبياً. أما إذا كانت T تعكس الطاقة التي تنبثها M ، فهذا يُعتبر صاروخ موجه نشط.

أما في الأنظمة شبه النشطة، تعتمد M على الطاقة المنعكسة بواسطة T ، حيث يتم "إضاءة" الأخيرة بواسطة مصدر I خارج عن كليهما. كما هو مذكور هنا، قد يكون *homing guidance* من النوع النشط، أو شبه النشط، أو السلبي [5]. العبارة "*homing guidance*" تُستخدم لوصف نظام صاروخي يمكنه استشعار الهدف ببعض الوسائل، ثم توجيه ذاته إلى الهدف عن طريق إرسال الأوامر إلى أسطح التحكم الخاصة به. يُعد الـ "*homing*" مفيداً في الصواريخ التكتيكية حيث تتطلب اعتبارات مثل التشغيل المستقل و عادةً ما يكون استشعار حركة الهدف من الصاروخ (أو الجسم المُطارَد) نفسه [8].

• **الصواريخ ذات التوجيه النشط:** قادرة على توجيه ذاتها بشكل مستقل بعد إطلاقها إلى الهدف و هي تنتمي إلى ما يسمى بفترة *launch-and-leave* تحمل مصدراً لإشعاع تُرسله لضرب الهدف ثم يعكس مرة أخرى إليه. هكذا فإن الصاروخ يوجه ذاته على هذا الإشعاع المنعكس. و في التوجيه النشط، يحتوي الصاروخ على جهاز إرسال رادار و جهاز استقبال.

• **الصواريخ ذات التوجيه السلبي:** تستخدم الإشعاع الصادر عن الهدف، أو عن مصدر آخر ليس جزءاً من نظام الأسلحة الشامل. عادة، ما يكون هذا الإشعاع في مجال الأشعة تحت الحمراء أو المجال المرئي، و لكنه قد يحدث أيضاً في مجال الموجات المايكروية.

• **الصواريخ ذات التوجيه شبه نشط:** تستخدم مزيجاً من التوجيه النشط و السلبي. مصدر الإشعاع هو جزء من النظام لكن لا يحمله الصاروخ. بشكل أكثر تحديداً، يُشع المصدر المستقل للإشعاع الطاقة إلى الهدف، حيث تنعكس الطاقة مرة أخرى إلى الصاروخ بحيث يستشعر الصاروخ الإشعاع المنعكس و بذلك يتوجه إليه (صورة 5).

يتحرك كل من T و M بسرعات منتظمة. نفترض أن إحداثيات النقطة M هي $M(t) = (x(t), y(t))$ و شعاع سرعتها هو \mathbf{v}_m . لنعتبر أن إحداثيات النقطة (الهدف) T هي $T(t) = (x_t(t), y_t(t))$ و شعاع سرعتها هو \mathbf{v}_t ، أما المتجه الذي يربط الهدف بالملاحق فإنه يسمى بشعاع خط الإبصار و يُعرّف بالعلاقة:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_t(t) - \mathbf{r}_m(t) = (x_t - x, y_t - y)$$

إن شرط ملاحقة الهدف وفق منحى المطاردة المباشرة هو ما يمكن تلخيصه في العبارة التالية: 'يجب أن يكون وحدة واحدة من شعاع السرعة M مساوياً لوحدة واحدة من شعاع خط الإبصار' أي $\vec{r}/r = \vec{v}_m/v_m$. معادلة حركة الهدف تعطى بواسطة:

$$T(t) = (x_t, y_t) = x_{t0}e_x + (y_{t0} + v_t t)e_y \quad (3)$$

بحيث $x_t = x_{t0}$ و $y_t = y_{t0} + v_t t$. لنفترض أن النقطة M تسير بالسرعة الثابتة v_m باتجاه الموضع اللحظي للهدف، بالتالي فإن المعادلة التفاضلية لحركة المتتبع $M(t) = (x(t), y(t))$ هي: $\vec{v}_m = v_m \cdot \vec{r}$. يعني:

$$[(x_t - x)^2 + (y_t - y)^2]^{1/2} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v_m \begin{bmatrix} x_t - x \\ y_t - y \end{bmatrix} \quad (4)$$

بعبارة أخرى هذا النظام عبارة جملة معادلتين تفاضليتين غير خطيتين يمكن كتابتهما على النحو الآتي:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_m(x_t - x)}{r}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{v_m(y_t - y)}{r} \quad (5)$$

حيث $r = [(x_t - x)^2 + (y_t - y)^2]^{1/2}$. لاحظ أنه من الممكن الحصول على عبارة تحليلية مغلقة $y = f(x)$ لحركة المتتبع M ، ثم لاحظ أنه إذا فرضنا أن $(x_t - x) \geq 0$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t - y}{x_t - x}; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{v_m}{[1 + (dy/dx)^2]^{1/2}} \quad (6)$$

$$\frac{dy_t}{dx} = \frac{dy_t}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{v_t}{v_m} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{مع العلم أن}$$

بضرب طرفي المعادلة $dy/dx = (y_t - y)/(x_t - x)$ في المقدار $(x_t - x)$ وأخذ المشتقة الأولى بالنسبة للمتغير x ، نحصل على:

3.1. المطاردة المباشرة¹¹

يعتبر منحى المطاردة¹² أول ما درس من هذه الأنواع السالفة الذكر، وكانت دراسته على يد الباحث ¹³*Pierre Bouguer* ثم من قبل عالم الرياضيات ¹⁴*Boole* في مقال عن الملاحة، حدد *Bouguer* منحى المطاردة لاستكشاف الطريقة التي قد تناور بها سفينة ما أثناء مطاردة سفينة أخرى و يتم إنشاؤه عن طريق القياس على وجود نقطة أو نقاط تمثل الملاحقين "Pursues" والملاحقين "Pursuers" وفي هذه الحالة منحى المطاردة هو المنحى الذي يتتبعه الملاحقون.

أحد قوانين التوجيه الأكثر وضوحًا و بدائية هو توجيه المطاردة المباشرة، حيث يتم توجيه شعاع سرعة الصاروخ نحو موقع الهدف في أي لحظة زمنية، و أحد الاشكال المستخرجة من هذه المطاردة هو التتبع المنحرف بزواوية ثابتة طوال المسار. تتطلب كل من قوانين المطاردة المباشرة و المنحرفة معدل دوران مرتفع جدًا عند الاقتراب من الهدف [3, 7, 10] المطاردة الخالصة تعني بشكل أساسي أن شعاع المسافة من الصاروخ إلى الهدف، عند ضربه بطويلة سرعة الصاروخ، يساوي شعاع سرعة الصاروخ مضروب بالمسافة بين المركبة و الهدف. هذه المحاذاة أو المساواة هي المفهوم الأساسي لخوارزمية المطاردة الخالصة، مما يضمن توجيه الصاروخ نحو الهدف. إن معيار مسار المطاردة الخالص هو أن الصاروخ يتجه دائمًا مباشرة نحو موقع الهدف الحالي [11]. رياضياً نكتب:

$$\left\| \frac{d\vec{r}_m}{dt} \right\| \cdot \vec{r} = \|\vec{r}\| \frac{d\vec{r}_m}{dt} \quad \text{or} \quad \frac{\vec{v}_m}{v_m} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

$$\text{or} \quad \vec{v}_m = v_m \vec{e}_r \quad \text{where} \quad \vec{e}_r = \vec{r}/r \quad (2)$$

\vec{r}_m : شعاع الموقع الحالي للمركبة (الصاروخ). \vec{r}_t : شعاع موضع الهدف. $\vec{r} = \vec{r}_t - \vec{r}_m$: المتجه النسبي من الصاروخ إلى الهدف. $\mathbf{v}_m = d\vec{r}_m/dt$: سرعة الصاروخ.

المعادلة أعلاه تضمن لنا أن اتجاه حركة الصاروخ تتماشى مع اتجاه الموقع المستقبلي للهدف، ذلك أنه يجب على الصاروخ أن يقوم بتعديل توجيهه و تحريف مساره نحو المكان الذي سيكون فيه الهدف في المستقبل، و ليس فقط حيثما هو موجود حاليًا [12]. لشرح القيادة بالمطاردة المباشرة بشكل جيد للغاية، ندرس المثال التالي: إذا كان الهدف T يتحرك على طول منحى معروف، فإن المتتبع (الصاروخ) M يسير وفق منحى المطاردة إذا و فقط إذا كان M موجّهًا دائمًا و في كل حين نحو الهدف T ، حيث

¹³ <https://shs.cairn.info/revue-d-histoire-des-sciences-2010-1-page-189>

¹⁴ <https://www.universalis.fr/encyclopedie/george-boole/>

¹¹ Pure Pursuit

¹² Radiodrome

هذه الحلول جيدة للغاية كونها دقيقة و مضبوطة، لكن يصعب عمليا الحصول على الحل التحليلي بشكله المغلق كلما كانت حركة الهدف أكثر مناورة و عشوائية. لتفادي مثل هذه المشاكل يجب علينا أن نستعين بالحواسيب الرقمية بدلا من الطرق الجبرية. عليه نقترح استعمال برنامج الماتلاب لحل نظام المعادلات عددياً باستخدام [طريقة أويلر](#)¹⁵ أو [رونج كوتا](#)¹⁶ حسب الاحتياج:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y_t - y}{x_t - x} &\Leftrightarrow y_t - y = (x_t - x) \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(y_t - y) &= (x_t - x) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \frac{d}{dx}(x_t - x) \\ \Leftrightarrow \frac{v_t}{v_m} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{dy}{dx} &= (x_t - x) \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

وفقا لما سبق، نحصل على المعادلة التفاضلية الغير خطية من الدرجة الثانية التالية:

$$\left\{ \left(\frac{v_m}{v_t} \right) [x_t - x] \right\}^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \quad (7)$$

التي يمكن أن نكتب على النحو التالي:

$$[x_t - x] \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v_t}{v_m} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (8)$$

نضع $k = v_t/v_m$ فيكون من العلاقة السابقة:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k \sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{(x_t - x)} \quad (9)$$

بتكامل أطراف المعادلة مرة واحدة نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sinh[B - k \ln(x_t - x)] \\ &= \frac{1}{2} e^B (x_t - x)^{-k} - \frac{1}{2} e^{-B} (x_t - x)^k \end{aligned}$$

حيث B هو ثابت التكامل الذي تحدده الشروط الابتدائية لـ dy/dx في اللحظة صفر.

بعد أن نكرر تكامل المعادلة الحاصلة مرة أخرى نحصل على الحلول

الآتية:

• If $k \neq 1$ ($v_t \neq v_m$) then

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-B} (x_t - x)^{1+k}}{1+k} - \frac{e^B (x_t - x)^{1-k}}{1-k} \right] + C \quad (10)$$

• If $k = 1$ or $v_t = v_m$ then

$$y = \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{-B}}{2} (x_t - x)^2 - e^B \ln(x_t - x) \right\} + C \quad (11)$$

¹⁵ Euler Method: <https://github.com/mattzh72/Eulers-Method-Visualizer>

¹⁶ Runge-Kutta:

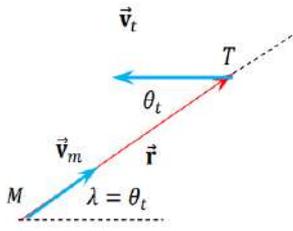
<https://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am33/Mathematica/ch3/RK.html>

يمكن إثبات أن المعادلة التفاضلية للمسار في الإحداثيات الكروية (θ على خط الطول، ϕ على خط الشاقول)، عندما يتحرك الهدف على خط الاستواء هي:

$$\frac{d^2\theta}{d\phi^2} = k \left(\frac{1}{c_\phi s_\phi} + \left(\frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 c_\phi s_\phi \right) \left[1 + \left(\frac{d\theta}{d\phi} s_\phi \right)^2 \right]^{1/2} - \left(\frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 c_\phi s_\phi - 2 \frac{d\theta}{d\phi} \left\{ \frac{c_\phi}{s_\phi} \right\} \quad (14)$$

حيث $s_\phi = \sin \phi$ و $c_\phi = \cos \phi$

مرة أخرى، مسار المطاردة الخالص هو مسار يتم فيه توجيه شعاع سرعة الصاروخ دائمًا نحو موقع الهدف اللحظي. عند استخلاص معادلات الحركة يتم وضع الافتراضات التالية: يتبع الهدف مسارًا مستقيمًا و لا يناور، سرعة الصاروخ و الهدف ثابتة، و نظام الإحداثيات ثنائي الأبعاد [3, 13, 14]. الهندسة المطلوبة



لاشتقاق واستخراج معادلات الحركة من مسار المطاردة الخالص في الإحداثيات القطبية موضحة في الشكل المقابل، حيث r تمثل المسافة اللحظية MT بين الصاروخ و الهدف و θ_t

الزاوية بين متجه السرعة المستهدفة و خط الرؤية. بالنسبة لهدف مدبر، يتم الحصول على معادلات الحركة بأخذ المركبتين المسقطتين و الناظرية على r :

$$r\dot{\theta}_t = -v_t \sin(\theta_t) \quad \text{و} \quad \dot{r} = v_t \cos(\theta_t) - v_m$$

باستعمال المعادلات $p = v_m/v_t$ و $\dot{r}/r = [p \csc(\theta_t) - \cot(\theta_t)]\dot{\theta}_t$ يمكن بعد المكاملة المباشرة الحصول على الحل التالي:

$$r = A \frac{(\sin(\theta_t))^{p-1}}{(1 + \cos(\theta_t))^p}; \quad A = r_0 \frac{(1 + \cos(\theta_0))^p}{(\sin(\theta_0))^{p-1}}; \quad p = \frac{v_m}{v_t}$$

The initial values r_0 and θ_0 .

بالنسبة لهدف مقبل باتجاه حركة المطارذ، فإن حركة كل منهما تعمل على تقليل r طالما أن θ_t حادة. و عندنا هنا θ_t رتيبة و متزايدة و بالتالي معادلات الحركة هي:

$$\dot{r} = -v_t \cos(\theta_t) - v_m \quad \text{و} \quad r\dot{\theta}_t = v_t \sin(\theta_t)$$

إن، $p = v_m/v_t$ حيث $\dot{r}/r = -[p \csc(\theta_t) + \cot(\theta_t)]\dot{\theta}_t$

```
clear all, clc, figure, hold on,
Vm=3.5; % The missile initial speed
Vt1=3; Vt2=1; % The target initial speed
dt=0.005; t=0; % Step size & initial time
M=[1.5;-8]; % Missile initial position
x0=1; y0=-10; % Target initial position
e = 1; T1 = []; T2 = []; X = []; Y = [];
while e>0.01
    xt=x0 + Vt1*t; yt=y0 + Vt2*t;
    x=M(1); y=M(2); % T and M positions
    dRm = pursuers(Vm,xt,yt,x,y);
    e = sqrt((xt-x)^2+(yt-y)^2);
    M = M + dt*dRm; % Euler Method
    T1 = [T1,xt]; T2 = [T2,yt];
    X = [X,x]; Y = [Y,y]; t = t+dt;
end
plot(X,Y,'b','LineWidth',1.5), grid on,
plot(T1,T2,'r','LineWidth',1.5)
%-----
function dRm=pursuers(Vm,xt,yt,x,y)
    D = sqrt((xt-x)^2 + (yt-y)^2);
    Dx = Vm*(xt-x)/D; dy = Vm*(yt-y)/D;
    dRm = [dx; dy];
end
```

بالنسبة لهدف يتحرك على حافة دائرة مركزها $O = (0,0)$ و نصف قطرها R ، نحصل على النظام التفاضلي التالي:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{v_m [R \cos(t) - x]}{[(R \cos(t) - x)^2 + (R \sin(t) - y)^2]^{1/2}} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{v_m [R \sin(t) - y]}{[(R \cos(t) - x)^2 + (R \sin(t) - y)^2]^{1/2}} \end{array} \right\} \quad (12)$$

من وجهة نظر تحليلية، إذا كان الهدف يتحرك على طول المسار $(R \cos(t), R \sin(t))$ فإن معادلات الحركة للمتتبع الذي يمر بـ $(0,0)$ هي:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{kR}{1+k^2} [k \cos(t) + \sin(t) - ke^{-kt}] \\ y = \frac{kR}{1+k^2} [k \sin(t) - \cos(t) + ke^{-kt}] \end{array} \right\} \quad (13)$$

مسار المطارذ عبارة عن دائرة مركزها O و نصف قطرها معطى بالعبارة $d = kR/(1+k^2)$ نظرًا لكون الحركة متسامية، فإن سرعته تصل إلى Vd/R ، و تتوول المسافة بين المطارذ و بين الهدف إلى d .

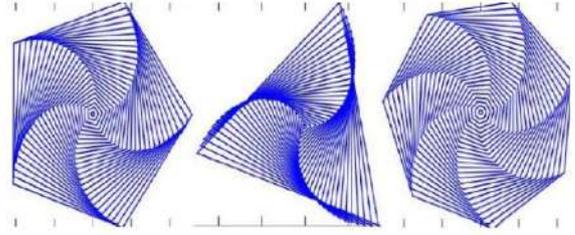
يقوم المعترض بتوجيه سرعته بزواوية قيادة غير صفيرية α تتقدم خط البصر بانحراف ثابت، مما ينتج عنه مسار مطاردة منحرف و معرف بـ $\delta(t) = \alpha$ (صورة 7).

و الحل بالتكامل المباشر هو:

$$r = A \frac{(1 + \cos(\theta_t))^p}{(\sin(\theta_t))^{p+1}}; \quad A = r_0 \frac{(\sin(\theta_0))^{p+1}}{(1 + \cos(\theta_0))^p}$$

Initial values r_0 and θ_0

ملاحظة: غالبًا ما يرسم المنحنى الذي يحتوي على العديد من الملاحين والمعروف بـ *mice problem* صورًا جميلة (صورة 6). يبدأ جميع المطاردين من زاوية مضلع منتظم، و يتبع كل منهم النقطة في اتجاه عقارب الساعة أو عكسها (يجب أن يكون الاتجاه موحدًا لجميع النقاط). عادةً ما تتبع النقاط النقطة المجاورة لها مباشرة، و يمكنها متابعة النقاط الأبعد. تلتقي جميع النقاط في النهاية في وسط المضلع [15, 12, 10]



صورة 6: صور توضيحية لمسألة مايك والمطاردة الخالصة للعديد من الأهداف والمطاردين

Algorithm: (2)

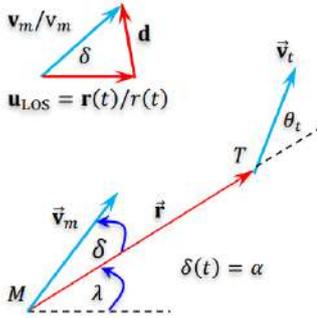
Initiation: $a_m = \text{Const}$, $\vec{v}_t(k) = \vec{f}(k)$,

$\vec{r}_t(1)$, $\vec{r}_m(1)$, and $v_m(1)$

While $e > \text{tolerance}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}(k) = \vec{r}_m(k) - \vec{r}_t(k) \\ \vec{v}_t(k) = [v_{tx}(k); v_{ty}(k); v_{tz}(k)] \\ \vec{r}_t(k+1) = \vec{r}_t(k) + \vec{v}_t \cdot dt \\ \vec{v}_m(k) = v_m(k) \left\{ \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} + \vec{d} \right\} \\ \vec{r}_m(k+1) = \vec{r}_m(k) + \vec{v}_m \cdot dt \\ v_m(k+1) = v_m(k) + a_m \cdot dt \\ e = \|\vec{r}(k)\| \\ \text{Update } k = k + 1 \end{array} \right.$$

End while



صورة 7: تمثيل بياني يوضح هندسة المطاردة المنحرفة¹⁸

استنادًا إلى الرسم البياني أعلاه نكتب:

$$\dot{r}(t) = v_t(t) \cos(\theta_t) - v_m(t) \cos(\delta)$$

$$\dot{\lambda}(t) = [v_t(t) \sin(\theta_t) - v_m(t) \sin(\delta)]/r(t)$$

هاتين المعادلتين تكافئان معادلة واحدة

$$\mathbf{v}_m(t) = v_m(t) [\mathbf{r}(t)/r(t)] + v_m(t) \mathbf{d} \quad (15)$$

و لكن فقط في الفضاء ثنائي الأبعاد. في حالة الهدف المتحرك أفقيًا لدينا $\dot{\lambda}(t) = -\dot{\theta}_t(t)$ و بالتالي حل معادلات الحركة يكون:

Algorithm: (1)

Initiation: $a_m = \text{Const}$, $\vec{v}_t(k) = \vec{f}(k)$,

$\vec{r}_t(1)$, $\vec{r}_m(1)$, and $v_m(1)$

While $e > \text{tolerance}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}(k) = \vec{r}_m(k) - \vec{r}_t(k) \\ \vec{v}_t(k) = [v_{tx}(k); v_{ty}(k); v_{tz}(k)] \\ \vec{r}_t(k+1) = \vec{r}_t(k) + \vec{v}_t \cdot dt \\ \vec{v}_m(k) = v_m(k) \left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \right) \\ \vec{r}_m(k+1) = \vec{r}_m(k) + \vec{v}_m \cdot dt \\ v_m(k+1) = v_m(k) + a_m \cdot dt \\ e = \|\vec{r}(k)\| \\ \text{Update } k = k + 1 \end{array} \right.$$

End while

3.2. المطاردة المنحرفة¹⁷

¹⁸ Deviated Pursuit

¹⁷ Deviated Pursuit

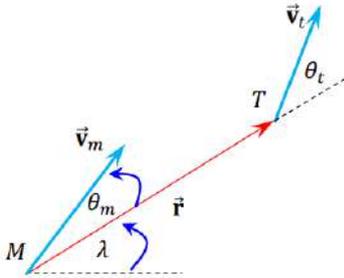
لكي نغوص في صلب هذا الموضوع، دعنا نعرف المقادير التالية
 v_m = سرعة الصاروخ، v_t = سرعة الهدف، و $\|\vec{r}\|$ = المسافة النسبية.
 قاعدة الملاحة المتوازية تعطي بالعلاقة التالية $\lambda(t) = 0$ (أو $\omega = 0$)
 حيث λ هي زاوية خط الإبصار مع بعض الخطوط المرجعية. وفقاً لهذه
 القاعدة، يظل اتجاه "LOS" ثابتاً بالنسبة لمعلم القصور الذاتي [يتم الحفاظ
 على توازي أي LOS جديد مع LOS الأولي]. في الهندسة المتجهة ثلاثية
 الأبعاد، تُعطى قاعدة الملاحة المتوازية بالصيغة $\vec{\omega} = \vec{0}$ حيث $\vec{\omega}$ هو شعاع
 معدل دوران خط الإبصار $\vec{r} = \vec{r}_t - \vec{r}_m$ إذا عرفنا الأشعة التالية \vec{v}_{tm}
 $\vec{\omega} = \vec{0}$ فإن $\vec{v}_c = -\vec{v}_{tm} = \vec{r} \times \vec{\omega}$ و $d\vec{r}/dt = \vec{v}_t - \vec{v}_m = \vec{\omega} \times \vec{r}$
 $\vec{r} \times \vec{v}_c = \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) = r^2 \vec{\omega} = \vec{0}$ لأن $\vec{0} \Leftrightarrow \vec{r} \times \vec{v}_c = \vec{0}$
 فهندسة المتجهات تعطينا المعادلات التفاضلية التالية:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = v_t(t) \cos(\theta_t) - v_m(t) \cos(\theta_m) \\ r \frac{d\lambda}{dt} = [v_t(t) \sin(\theta_t) - v_m(t) \sin(\theta_m)] = 0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

كما تشير قاعدة الملاحة المتوازية إلى ما يلي

$$\lambda(t) = 0 \Rightarrow \omega(t) = 0 \Rightarrow v_t(t) \sin(\theta_t) = v_m(t) \sin(\theta_m)$$

$$\theta_t = \text{asin}\left(\frac{v_m}{v_t} \sin(\theta_m)\right) \quad \text{The collision triangle rule}$$



صورة 9: تمثيل بياني يوضح هندسة المطاردة المتوازية²¹

تعود نظرية الاصطدام إلى فكرة البحارة القديمة التي تتنبأ
 بالاصطدام بالسفن الأخرى و هي "التوجيه الثابت، المسافة المتناقصة". يتم
 تعريف مثلث الاصطدام على أنه المثلث الذي يتكون من المواقع الأولية
 للصاروخ، الهدف، و نقطة الاعتراض حيث يضرب الصاروخ الهدف
 عندما يطير في خط مستقيم [17].

²¹ Parallel Pursuit

$$r(k+1) = r(k) + [\Delta r]dt$$

$$\theta_t(k+1) = \theta_t(k) - [\Delta \theta_t]dt$$

$$\Delta r = [v_t \cos(\theta_t) - v_m \cos(\delta)]$$

$$\Delta \theta_t = [(v_t/r(t)) \sin(\theta_t) - (v_m/r(t)) \sin(\delta)]$$

Algorithm: (3)

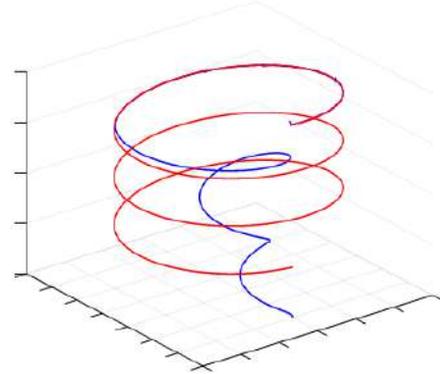
Initiation: $\delta = \text{Const}$, $e = \text{Const}$, $k = 1$

$x_t(1)$, $y_t(1)$, $\|\vec{r}(1)\|$, $\theta_t(1)$, v_m and v_t

While $e > \text{tolerance}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_t(k+1) = x_t(k) - v_t \cdot dt \\ y_t(k+1) = y_t(k) \\ r(k+1) = r(k) + (v_t \cos(\theta_t) - v_m \cos(\delta))dt \\ x(k) = x_t(k) - r(k) \cdot \cos(\theta_t) \\ y(k) = y_t(k) - r(k) \cdot \sin(\theta_t) \\ \Delta \theta_t = [v_t \sin(\theta_t) - v_m \sin(\delta)]/r(t) \\ \theta_t(k+1) = \theta_t(k) - [\Delta \theta_t]dt; \quad e = \|\vec{r}(k)\| \\ \text{Update} \quad k = k + 1 \end{array} \right.$$

End while



صورة 8: محاكاة ثلاثية الأبعاد تبين فعالية المطاردة المنحرفة¹⁹

3.3. الملاحة المتوازية²⁰

يتبع الصاروخ مسار الاتجاه الثابت عندما يحافظ خط
 البصر "LOS" على اتجاه ثابت في الفضاء، أي "ثابت λ ". وغالبا ما
 يشار إلى مسار هذا النوع من الملاحة باسم المسار تصادمي و بما أن
 الاصطدام هو النتيجة النهائية، فبات من الواضح أن سرعة الصاروخ يجب
 أن تكون أكبر من سرعة الهدف. هذا النوع من الملاحة قديم جدا و تم
 اكتشافه من طرف البحرية الأمريكية في الأربعينيات [16].

¹⁹ Deviated Pursuit

²⁰ Parallel Nav or Constant Bearing

وبالتالي فإنه $a_n = v_m \omega_m = v_m (d\theta_m/dt)$ ثم لاحظ أن

$$v_t \sin(\theta_t) = v_m \sin(\theta_m) \text{ و الذي يكافئ}$$

$$v_m^2 [1 - \cos^2(\theta_m)] = v_t^2 \sin^2(\theta_t)$$

وعليه

$$a_n = v_m \frac{d\theta_m}{dt} = \frac{dv_t \sin(\theta_t)}{dt \cos(\theta_m)} = \frac{k(dv_t/dt) \sin(\theta_t)}{\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta_t)}} \quad (20)$$

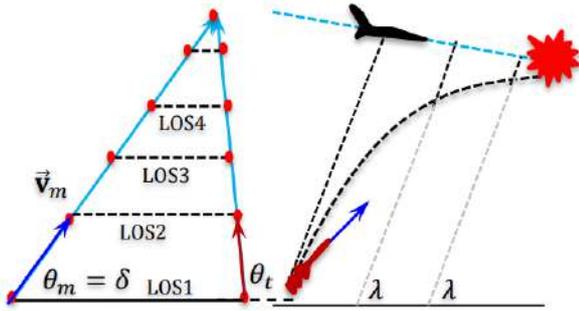
$$k = v_m/v_t; \quad \cos(\theta_m) = k/\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta_t)} \quad \text{حيث}$$

يمكن الحصول على صيغة بديلة إذا استخدمنا

$$\tan(\theta_m) = \sin(\theta_t) / \sqrt{k^2 - \sin^2(\theta_t)}$$

$$a_n = v_m (d\theta_m/dt) \Leftrightarrow$$

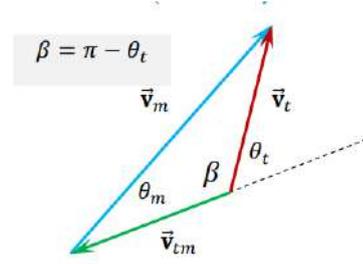
$$a_n = k \frac{dv_t}{dt} \frac{\sin(\theta_t)}{\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta_t)}} = k \frac{dv_t}{dt} \tan(\theta_m) \quad (21)$$



صورة 10: مقارنة بيانية توضح هندسة المطاردة الموازية

3.4. الملاحاة التناسبية²²

يتحرك الصاروخ بطريقة يتناسب فيها معدل دورانه مع معدل دوران خط الإبصار الممتد من الصاروخ إلى الهدف و يبقى هذا التناسب ثابتاً في أي لحظة من الزمن $\dot{\gamma}(t) = N\dot{\lambda}(t)$. إذا كان معدل دوران الصاروخ يساوي معدل دوران خط البصر، يصبح مسار الرحلة مسار مطاردة. بشكل عام، في الملاحاة التناسبية، يكون معدل دوران الصاروخ مضاعفًا ثابتاً لمعدل LOS ، و تكون المسارات أقل انحناءً من مسارات المطاردة، ولكنها أكثر انحناءً من مسارات الاضطدام [18]. في معظم الصواريخ الحديثة تستخدم أنظمة التوجيه قانون توجيه يسمى بالملاحاة



قانون الجيب يعطي

$$\frac{v_m}{\sin(\beta)} = \frac{v_m}{\sin(\pi - \theta_t)} = \frac{v_m}{\sin(\theta_t)} = \frac{v_t}{\sin(\theta_m)} \quad (17)$$

يعني أن مثلث الاضطدام ينتج المعادلة التالية

$$\theta_m = \sin^{-1}\left(\frac{v_t}{v_m} \sin(\theta_t)\right) \text{ or } \theta_t = \sin^{-1}\left(\frac{v_m}{v_t} \sin(\theta_m)\right)$$

الشرط الأول لمثلث التصادم هو أن تكون الزاوية λ ثابتة، و هذا هو نفسه القول إن معدل التغيير في LOS صفرًا. أما الشرط الثاني لمثلث التصادم فهو أن تتناقص المسافة $\vec{r} = \vec{r}_t - \vec{r}_m$ مع مرور الزمن.

يمكن التعبير عن هذين الشرطين رياضياً بالعلاقة الآتية، λ و $\dot{r} < 0$ ثابت

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_t = \sin^{-1}\left(\frac{v_m}{v_t} \sin(\theta_m)\right) \\ v_t(t) \cos(\theta_t) - v_m(t) \cos(\theta_m) < 0 \end{array} \right\} \quad (18)$$

إذا افترضنا أن $v_t(t) = \|\vec{v}_t\|$ متغير و أن θ_t ثابت فلدينا

$$v_t(t) \sin(\theta_t) = v_m \sin(\theta_m)$$

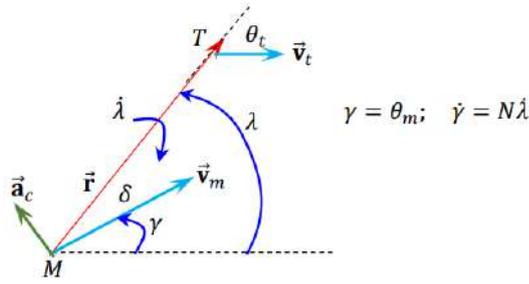
أي

$$\frac{dv_t}{dt} \sin(\theta_t) = v_m \frac{d\theta_m}{dt} \cos(\theta_m) \Leftrightarrow v_m \frac{d\theta_m}{dt} = \frac{dv_t \sin(\theta_t)}{dt \cos(\theta_m)} \quad (19)$$

مع العلم أن طولية شعاع التسارع الناظمي للصاروخ a_n يعطى

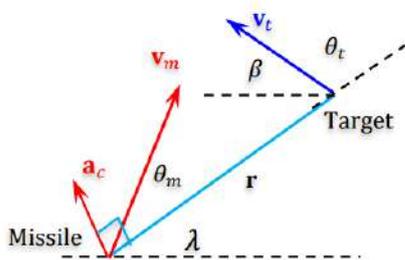
$$\text{بالعلاقة التالية } a_n = v_m (d\theta_m/dt) \text{ لأنه}$$

$$\vec{a}_n = (v_m^2/r)\vec{n} = v_m (v_m/r)\vec{n} = (v_m \omega_m)\vec{n}$$



صورة 12: تمثيل بياني يوضح هندسة المطاردة التناسبية

من الناحية النظرية: قانون توجيه الملاحه التناسبي، يصدر أوامرا مفادها حمل الصاروخ على السير بتسارع لحظي عمودي على خط رؤية هدف الصاروخ، ويتناسب مع معدل خط البصر وسرعة الاقتراب. في الصواريخ التكنيكية الموجهة بالرادار التي تستخدم التوجيه الملاحه المتناسب، يوفر جهاز التحسس قياساً فعالاً لمعدل خط البصر، ويوفر رادار دوبلر معلومات سرعة الاقتراب. في تطبيقات الصواريخ التكنيكية الموجهة بالأشعة تحت الحمراء، فإنه يتم قياس معدل خط البصر، في حين أن سرعة الاقتراب، التي يتطلبها قانون التوجيه، تكون "تخمينية" [19]. يتم تعريف طولية سرعة الاقتراب v_c على أنها المعدل السلبي للتغير في المسافة من الصاروخ إلى الهدف، بعبارة رياضية $v_c = -d\|\vec{r}\|/dt$. عندما يكون الصاروخ والهدف في أقرب مسافة، تتغير إشارة سرعة الاقتراب. بمعنى آخر، من حساب التفاضل و التكامل، نعلم أن سرعة الاقتراب تكون صفراً عندما تكون $r = \|\vec{r}\|$ قيمة دنيا (أي أن الدالة تكون إما الحد الأدنى أو الأقصى عندما تكون مشتقتها صفراً). و التسارع الناظمي المطلوب \vec{a}_c ، المستخرج من قانون توجيه الملاحه التناسبي، يكون متعامداً مع خط الرؤية اللحظي [8].



في نموذج التتبع ثنائي البعد، يمكن للهدف المناورة بشكل مراوغ ويتسارع ناظمي \vec{a}_t ، ونظراً لكون تسارع الهدف \vec{a}_t متعامد مع متجه سرعته، فإنه يمكن التعبير عن سرعته الزاوية بـ $\beta = \pi - (\theta_t + \lambda)$

$$\beta(t) = (a_t/v_t)t \Leftrightarrow \beta(t) = \beta(t - \Delta t) + (a_t/v_t)\Delta t$$

التناسبية و يرمز له بـ PN ، حيث يتم التحكم في الدوران بمعدل $\dot{\gamma}$ يتناسب مع معدل دوران خط البصر (أي، السرعة الزاوية $\dot{\lambda}$ لخط البصر)، و يكون $\dot{\gamma}(t) = N\dot{\lambda}(t)$ و في ميدان ملاحه الصواريخ يُطلق على N بثابت الملاحه و يقع في المجال بين 3 و 5 (لاحظ أن PN يشير على وجه التحديد إلى قانون التوجيه $\dot{\gamma}(t) = N\dot{\lambda}(t)$ و يختلف عن التحكم التناسبي). بشكل أساسي، يقوم PN بتدوير اتجاه الصاروخ بمعدل يتناسب مع معدل LOS . إذا كان PN يعمل بشكل مثالي، فيجب أن يتقارب معدل LOS و يبقى عند الصفر حتى يتم الاعتراض. يخبرنا علم الحركة أن التسارع المطلوب هو $a_c = Nv_c\dot{\lambda}(t)$ [7].



صورة 11: فوتوغرافيك يوضح منحني المطاردة التناسبية

التفسير: في الميكانيكا، يتم تحديد التسارع الناظمي بواسطة العلاقة $\vec{a}_n = (v^2/r)\vec{n} = v\omega\vec{n} \Rightarrow a_n = v(d\theta/dt)$

$$a_c = v_c \frac{d\theta_m}{dt} = v_c \frac{d\gamma}{dt} = Nv_c \frac{d\lambda}{dt}; \text{ simply } a_c = Nv_c\dot{\lambda}(t)$$

حيث v_c تدعى سرعة الاقتراب وعلى الشكل الشعاعي لدينا

$$\vec{a}_c = N\vec{\omega} \times \vec{v}_c \text{ and } \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}_c / (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \vec{r} \times \vec{v}_c / \|\vec{r}\|^2$$

وأخيراً

$$\vec{a}_c = -N\vec{v}_c \times \vec{\omega} \text{ أو } \vec{a}_c = N(\vec{r} \times \vec{v}_c) \times \vec{v}_c / \|\vec{r}\|^2$$

Algorithm: (4)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_m \text{ and } \mathbf{v}_{tm} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_m \\ v_c &= -(r_x v_{tmx} + r_y v_{tmy})/r \\ \lambda &= \tan^{-1}(r_y/r_x) \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{1}{r^2}(r_x v_{tmy} - r_y v_{tmx}) \\ a_c &= N v_c (d\lambda/dt) \\ \mathbf{a}_m &= a_c \mathbf{u}_c \text{ with } \mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_t &= v_t \mathbf{u}_t \text{ with } \mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} -\cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \\ d\beta/dt &= a_{nt} / v_t \end{aligned}$$

Updates by Euler method

$$\begin{aligned} \beta(k+1) &= \beta(k) + \left(\frac{a_{nt}}{v_t}\right) \cdot dt \\ \mathbf{r}_t(k+1) &= \mathbf{r}_t(k) + \mathbf{v}_t \cdot dt \\ \mathbf{r}_m(k+1) &= \mathbf{r}_m(k) + \mathbf{v}_m \cdot dt \\ \mathbf{v}_m(k+1) &= \mathbf{v}_m(k) + \mathbf{a}_m \cdot dt \end{aligned}$$

ملاحظة :

إذا لم يكن هناك تقارب نستخدم طريقة تحديث أخرى مثل طريقة Runge-Kutta من الدرجة 2 أو حتى طريقة Runge-Kutta من الدرجة الرابعة

من الناحية التطبيقية، فالصاروخ الذي مقدار سرعته \mathbf{v}_m ، يتجه بزواوية $\theta = \theta_{Lead} + \theta_{He}$ بالنسبة إلى خط الرؤية. تُعرف الزواوية θ_{Lead} باسم زواوية تقدم الصاروخ، هذه الزواوية هي الزواوية الصحيحة نظرياً لتواجد الصاروخ على مثلث الاصطدام. بمعنى آخر، إذا كان الصاروخ في مثلث الاصطدام، فلن تكون هناك حاجة إلى المزيد من أوامر التسارع حتى يصل الصاروخ إلى الهدف. الزواوية θ_{He} تُعرف ب زواوية الخطأ الرأسية، تمثل هذه الزواوية الانحراف الأولي للصاروخ عن مثلث الاصطدام. الزواوية الأولية لشعاع سرعة الصاروخ بالنسبة إلى خط الرؤية تُعرف بزواوية تقدم الصاروخ θ_{Lead} . يمكن الحصول على زواوية التقدم النظرية للصاروخ θ_{Lead} من خلال تطبيق قانون الجيب:

$$\theta_{Lead} = \sin^{-1}((v_t/v_m) \sin(\beta + \lambda))$$

من الناحية العملية أيضاً، أنه لا يتم إطلاق الصاروخ بالضبط على مثلث الاصطدام، حيث أن نقطة الاعتراض المتوقعة غير معروفة بدقة. لا يمكن تقريب موقع نقطة التقاطع لأننا لا نعرف مسبقاً ما الذي سيفعله الهدف في المستقبل. في الواقع، هذا هو سبب الحاجة إلى نظام توجيه و بالتالي يمكن التعبير عن مركبات السرعة الأولية للصاروخ بدلالة زواوية التقدم θ_{Lead} و خطأ الاتجاه الفعلي θ_{He} :-

$$v_{mx}(0) = v_m \cos \theta ; v_{my}(0) = v_m \sin \theta$$

حيث v_t هو طول شعاع سرعة الهدف. يمكن العثور على مركبات $\mathbf{v}_t(t)$ في نظام الإحداثيات القصور الذاتي من خلال تكامل المعادلة التفاضلية المقدمة سابقاً و الحصول على الزواوية $\beta(t)$ ثم التعويض في $v_{tx}(t) = -v_t \cos \beta(t)$; $v_{ty}(t) = v_t \sin \beta(t)$ للعثور على مركبات تسارع الصاروخ $\mathbf{a}_m(t)$ ، فإنه يجب علينا أولاً العثور على مركبات الفرق النسبي بين الصاروخ و الهدف. أولاً لدينا:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_t(t) - \mathbf{r}_m(t) = [r_x \quad r_y]^T$$

يمكننا أن نرى من الشكل أعلاه أنه يمكن العثور على زواوية خط البصر بدلالة مركبات الفرق النسبي $\lambda = \tan^{-1}(r_y/r_x)$. أما عن مركبات السرعة النسبية في إحداثيات القصور الذاتي فإنها:

$$\mathbf{v}_{tm}(t) = \mathbf{v}_t(t) - \mathbf{v}_m(t) = [v_{tmx} \quad v_{tmy}]^T$$

يمكننا الآن حساب معدل دوران خط البصر عن طريق الاشتقاق المباشر لـ الزواوية λ . يتم التعبير عن معدل دوران خط البصر $\dot{\lambda}$ بواسطة

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{r^2}(r_x v_{tmy} - r_y v_{tmx})$$

و ذلك باستعمال العلاقتين التاليتين

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1}(u(t)) = \frac{du/dt}{1+u^2} \quad \& \quad r^2 = r_x^2 + r_y^2$$

بما أن سرعة الاقتراب تم تعريفها على أنها المعدل السليبي للتغير في المسافة الفاصلة بين الصاروخ و الهدف أي $v_c = -d\|\mathbf{r}\|/dt$ فيمكن الحصول عليها عن طريق اشتقاق المعادلة السابقة، مما ينتج عنه

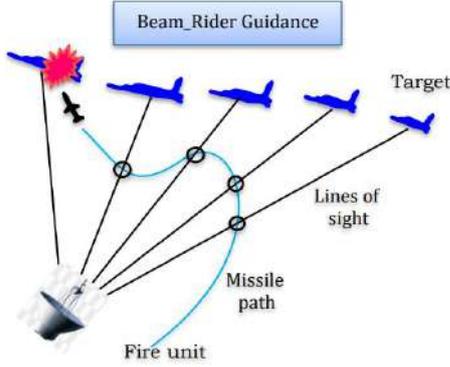
$$v_c = -\frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2} \right) = -\frac{1}{r} (r_x v_{tmx} + r_y v_{tmy})$$

وأخيراً نخلص إلى

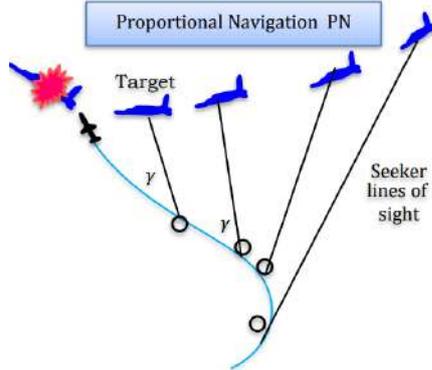
$$\left\{ \begin{aligned} v_c &= -\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r} (r_x v_{tmx} + r_y v_{tmy}) \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{1}{r^2} (r_x v_{tmy} - r_y v_{tmx}) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

بعد هذا كله يمكننا العثور على طول شعاع تسارع الصاروخ المطلوب \mathbf{a}_c من تعريف الملاحاة التناسبية، $\mathbf{a}_c = N v_c \dot{\lambda}$ و نظراً لكون \mathbf{a}_c متعامد مع خط الرؤية اللحظي، فيمكن العثور على مكونات تسارع الصاروخ في إحداثيات الأرض $\mathbf{a}_m = a_c \mathbf{u}_c = a_c [-\sin \lambda \quad \cos \lambda]^T$ وفي الأخير نلخص خوارزمية هذه الملاحاة

الجناح لإبطال أي تطورات في سرعة دوران LOS المقاسة. و هذا التسارع الناظمي يعطى بـ: $a_c = N v_c (\omega_f \times u_{cl}) \Rightarrow a_c = N v_c \omega_f$ حيث أن: a_c هو شعاع التسارع الناظمي المتحكم به، N هو ثابت الملاحة، v_c هي سرعة الإقتراب، و $\omega_f = dl/dt$ سرعة دوران LOS الذي تم قياسه بواسطة المتحسس الصاروخي.



صورة 14: هندسة الملاحة بتوجيه - خط الإبصار الحامل- لغرض المقارنة مع PN

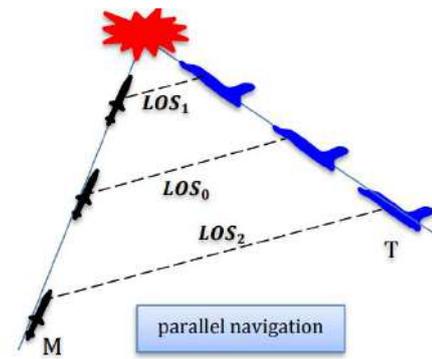


صورة 15: توضيح هندسي للملاحة التناسبية

• غالبية الصواريخ التي تحتوي على متحسسات "seekers" تستخدم نظام الملاحة PN، و الذي يعتمد على معدل التتبع الزاوي لرأس المتحسس. يفرض PN على شعاع توجيه صاروخ أن يدور بمعدل يتناسب مع (LOS-rate)، و في نفس الاتجاه. و بناء على هذا القول نلخص في $a_c(t) = N(v_c \times \omega_{LOS})$ حيث $\omega_{LOS} = (r \times v_{T/M}) / (r \cdot r)$ و لأن العبارة الرياضية لـ LOS ليست خطية مع شعاع توجيه الصاروخ، فإن التسارع المطبق لا يحافظ بالضرورة على الطاقة الحركية. و من الناحية العملية، في غياب القدرة على خنق المحرك، قد لا يكون هذا النوع من التحكم ممكناً [2].

3.5. شقائق الملاحة التناسبية²³

الملاحة النسبية هي قانون التوجيه الأكثر شهرة واستخداماً للصواريخ الموجهة قصيرة ومتوسطة المدى. و مع بساطتها المتأصلة وسهولة تنفيذها فإنها قوية للغاية حيث يمكنها تحقيق مسافات مقبولة و إن كانت الأهداف التي تقوم بمناورات مراوغة شديدة نسبياً إذا كان وقت استجابة الصاروخ قصيراً بدرجة كافية و كان قادراً على التسارع الكافي في المناورة الجانبية. كما تنص قاعدة الملاحة الموازية على أن: اتجاه خط البصر (LOS) يظل ثابتاً بالنسبة إلى فضاء القصور الذاتي، أي أن LOS يظل موازياً لخط البصر الأولي. الملاحة التناسبية (PN) هي قانون التوجيه الذي يطبق الملاحة المتوازية، لكنه أبقى معدل خط البصر صفراً بدلاً من الاتجاه الثابت. لذلك في PN قد يتغير اتجاه خط الرؤية ولكن بمعدل صفر. يفرض PN أن متجه سرعة الصاروخ يجب أن يدور بمعدل يتناسب مع معدل دوران خط البصر (LOS-rate)، و في نفس الاتجاه [5]. ببساطة، يعتمد توجيه الملاحة التناسبي الكلاسيكي على الحقيقة المنطقية القائلة "أنه إذا كان جسمان قريبان من بعضهما البعض، فسوف يصطدمان في النهاية إذا لم يتم خط البصر بالدوران بالنسبة لفضاء القصور الذاتي". و هو يعتمد على حقيقة أن مركبتان تسيران في مسار تصادمي عندما لا يتغير اتجاه خط رؤيتهما المباشر عند الاقتراب الكافي. و بشكل أكثر تحديداً، يسعى قانون التوجيه PN إلى إلغاء معدل LOS ضد الأهداف غير المناورة من خلال جعل اتجاه الصاروخ الاعتراضية متناسباً مع معدل LOS. على سبيل المثال، عند الطيران في مسار ملاحي متناسب، يحاول الصاروخ إلغاء أي تطور في السرعة الزاوية لخط البصر. يقوم الصاروخ بذلك عن طريق توجيه انحرافات الجناح إلى أسطح التحكم [20].

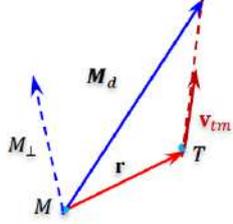


صورة 13: تمثيل بياني يوضح الملاحة التناسبية وأنها تشبه المتوازية عند الاقتراب

هذه الانحرافات تتطلب من الصاروخ القيام بتنفيذ تسارعات ناظرية على شعاع سرعته اللحظية. وبالتالي، فإن الصاروخ يتحكم في انحرافات

²³ Alternates of Prop-Nav

والتي يرمز لها بـ M_d على أنها المسافة التي سيفتقد فيها الصاروخ اعتراض الهدف إذا استمر الهدف في مساره الحالي ولم يتم الصاروخ بأي مناورات تصحيحية أخرى. يمكن التعبير عن ZEM بـ:



$$M_d = \mathbf{r} + \mathbf{v}_{tm}t_{go} = \mathbf{r} + \mathbf{v}_{tm}(t_f - t)$$

$$\text{حيث } \mathbf{r} = \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_m \text{ و}$$

$$t_{go} = t_f - t = (v_{co}/r) - t$$

هو الوقت اللازم منذ الانطلاق حتى

التقاطع. وبالتالي، يمكننا أن نرى أنه في

هذه الحالة، فإن ZEM هو مجرد تنبؤ بسيط (بافتراض سرعات ثابتة وتسارع صفري) للفرق النسبي المستقبلي بين الصاروخ والهدف. من الشكل يمكننا أن نرى أن مركبة M_d المتعامدة مع خط البصر والتي يرمز لها بـ M_{\perp} يمكن العثور عليها بواسطة حساب المثلثات و يعطى بواسطة

$$M_{\text{oriented}} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{bmatrix} M_d = \begin{bmatrix} * \\ M_{\perp} \end{bmatrix} \quad (23)$$

حيث أن المسافة الناظرية هي $M_d = [-\sin(\lambda) \quad \cos(\lambda)] M_{\perp}$

مما يعني $M_{\perp} = v_{LOS} t_{go} = [r(d\lambda/dt)] t_{go}$ من ناحية أخرى لدينا

$$M_{\perp} = \frac{t_{go}}{r} [r_x v_{tmx} - r_y v_{tmy}] \quad \text{و} \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{M_{\perp}}{r t_{go}}$$

إذا افترضنا أن الفرق النسبي بين الصاروخ والهدف وسرعة الاقتراب يرتبطان تقريبًا بالوقت الذي يمر: $t_{go} = r/v_c$ ، فإن قانون التوجيه عن طريق الملاحظة التناسبية يمكن التعبير عن بدلالة M_{\perp} على النحو الآتي

$$a_c = N v_c \frac{d\lambda}{dt} = N \frac{r}{t_{go}} \frac{M_{\perp}}{r t_{go}} = \frac{N}{t_{go}^2} M_{\perp} \quad \text{and} \quad (24)$$

$$a_c = \frac{N}{t_{go}^2} M_{\perp} = \frac{N}{t_{go}^2} \left[M_d - (M_d \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} \right]$$

هكذا، يمكننا أن نرى أن تسارع الملاحظة التناسبية المعامد لخط البصر لا يتناسب فقط مع السرعة الزاوية لخط البصر وسرعة الاقتراب ولكنه يتناسب أيضًا مع ZEM ويتناسب عكسيًا مع مربع وقت الذهاب [19]. الآن دعونا نلخص الخوارزمية في

• يمكن أيضًا تحقيق PN في أرض الواقع باستخدام فرق السرعة اللحظية: $\mathbf{a}_c(t) = N(\mathbf{v}_{T/M} \times \boldsymbol{\omega}_{LOS})$ معرف كما سبق. هذا التسارع يعتمد بشكل صريح على $\mathbf{v}_{T/M}$ ، والذي قد يكون من الصعب الحصول عليه عمليًا [5].

• إذا كان المطلوب من غرفة التوجيه أو القيادة هو: تحديد التسارع الناظمي اللحظي لما يسمى بـ LOS، فإن التعبير التالي يكون دوماً صالحاً ومقبولاً في مجال التوجيه الصاروخي

$$\mathbf{a}_c(t) = -N \|\mathbf{v}_{T/M}\| (\mathbf{u}_r \times \boldsymbol{\omega}_{LOS}) \quad \text{علماً أن: } \mathbf{u}_r = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\| \quad [21]$$

• إذا كان التحكم في الحفاظ على الطاقة مطلوباً (كما هو الحال عند استخدام أسطح التحكم فقط)، فيمكن استخدام التسارع التالي، والمتعامد مع شعاع سرعة الصاروخ $\mathbf{a}_c(t) = N \|\mathbf{v}_{T/M}\| (\mathbf{u}_m \times \boldsymbol{\omega}_{LOS})$ مع العلم أن $\mathbf{u}_m = \mathbf{v}_m / \|\mathbf{v}_m\|$. في الصواريخ من نوع AIM-9 Sidewinder يمكن العثور على تطبيق بسيط لقانون التوجيه هذا عن طريق بعض المعدات التي تستخدم مرآة القطع المكافئ كمتحسس والتي تدور بسرعة عالية [3].

هنا نلخص قوانين التوجيه الخاصة بالملاحظة التناسبية

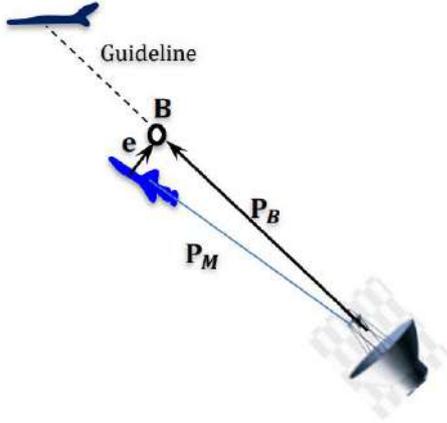
وشقائقتها

$$\left. \begin{aligned} \bullet \mathbf{a}_c &= N(\mathbf{v}_{TM} \times \boldsymbol{\omega}_{LOS}) \\ \bullet \mathbf{a}_c &= N(\boldsymbol{\omega}_{LOS} \times \mathbf{v}_c) \\ \bullet \mathbf{a}_c &= \frac{N}{r^2} \mathbf{v}_c \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_c) \end{aligned} \right\} \text{with } \begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{LOS} &= \left\{ \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{TM}}{r^2} \right\} \\ \mathbf{v}_{TM} &= \mathbf{v}_T - \mathbf{v}_M \\ \mathbf{v}_c &= \mathbf{v}_M - \mathbf{v}_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{a}_c &= N \frac{\|\mathbf{v}_{TM}\|}{r} (\boldsymbol{\omega}_{LOS} \times \mathbf{r}) = N \|\mathbf{v}_{TM}\| (\boldsymbol{\omega}_{LOS} \times \mathbf{u}_r) \\ \bullet \mathbf{a}_c &= N \frac{\|\mathbf{v}_{TM}\|}{\|\mathbf{v}_M\|} (\mathbf{v}_M \times \boldsymbol{\omega}_{LOS}) = N \|\mathbf{v}_{TM}\| (\mathbf{u}_m \times \boldsymbol{\omega}_{LOS}) \\ \bullet \mathbf{a}_c &= N \left[\mathbf{u}_r \times \left\{ \frac{\|\mathbf{v}_c\|}{r} \mathbf{v}_{TM} + \frac{1}{2} \mathbf{a}_T \right\} \right] \times \mathbf{u}_r \quad (\text{APN}) \end{aligned}$$

3.6. الملاحظة التناسبية مع عدم بذل أي الجهد²⁴

لقد رأينا حتى الآن أن الملاحظة التناسبية تبدو فعالة، لكننا لا نعرف السبب. على الرغم من أنه من الممكن إنشاء حجج هندسية توضح أنه من المنطقي جداً إصدار أوامر تسريع تتناسب مع معدل خط البصر (أي أن معدل خط البصر صفر يعني أننا على مثلث تصادم وبالتالي لا توجد أوامر أخرى ضرورية)، فليس من الواضح ما يحدث. إن مفهوم عدم بذل أي جهد ليس مفيداً فقط في شرح التنقل التناسبي ولكنه مفيد أيضاً في استخلاص وفهم قوانين التوجيه الأكثر تقدماً. يمكننا تعريف "zero effort miss"



صورة 17: تمثيل هندسي يبين الملاحة بتوجيه خط الإبصار

التوجيه بخط البصر يسعى جاهدا لإبقاء الصاروخ ضمن شعاع التوجيه المنقول من الأرض. لنعرف الأشعة الأساسية في بناء التسارع المطلوب للصاروخ، و كما هو موضح في الشكل: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_B - \mathbf{P}_M$ و الشعاع حيث $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_M$ و الشعاع $\mathbf{u}_3 = (\boldsymbol{\omega}_{gl} \times \mathbf{u}_{cl}) / \|\boldsymbol{\omega}_{gl} \times \mathbf{u}_{cl}\|$ و $\mathbf{u}_{cl} = [C_\theta C_\psi : C_\theta S_\psi : -S_\theta]^T$ و $\boldsymbol{\omega}_{gl} = (\mathbf{P}_T \times \mathbf{v}_T) / \|\mathbf{P}_T\|^2$ ونعرف أيضا \mathbf{P}_B على أنه متجه موضع النقطة B الواقعة على خط الرؤية الأرضية و هي الإسقاط العمودي لموضع الصاروخ على الحامل، \mathbf{P}_T .

$$\mathbf{P}_B = (\mathbf{u}_{gl} \cdot \mathbf{P}_M) \mathbf{u}_{gl} = (\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{P}_M / \|\mathbf{P}_T\|^2) \mathbf{P}_T = \kappa \mathbf{P}_T \quad (25)$$

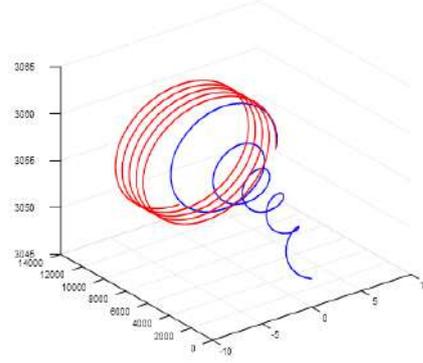
حيث $\mathbf{u}_{gl} = \mathbf{P}_T / \|\mathbf{P}_T\|$ وباستخدام كل من \mathbf{u}_1 و \mathbf{u}_2 و \mathbf{u}_3 ، يمكن توجيه الصاروخ على خط الدليل، وفقا لـ

$$\mathbf{a}_c = k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + k_3 A_{corio} \mathbf{u}_3 \\ = k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 + k_3 A_{corio} (\boldsymbol{\omega}_{gl} \times \mathbf{u}_{cl}) / \|\boldsymbol{\omega}_{gl} \times \mathbf{u}_{cl}\|$$

التسارع A_{corio} ، ينتج عن الدوران الزاوي لشعاع التوجيه الأرضي، وهو مكون أساسي في تسارع الصاروخ إذ يسمح له بمواكبة دوران الشعاع الأرضي. و في تطبيقات الصواريخ سطح-جو، عادة ما يكون المعدل الزاوي لشعاع التوجيه كبير بما يكفي وهذا مما يجعل من هذه المعلمة مكونا أساسيا في توجيه الصاروخ. يتم حساب تسارع A_{corio} بواسطة $A_{corio} = \text{Mag}[\dots]$ حيث $\text{Mag}[\dots]$ هو طولية أي مقدار. والمقادير k_1 و k_2 و k_3 هي ثوابت التناسب، وعادة ما يتم حساب ثوابت التناسب هذه باستخدام طرق التحسين الأمثل و في هذا الصدد نختار خوارزمية PSO لتقليل من مسافة M_d [5].

Algorithm: (5)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_m \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_{tm} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_m \\ \mathbf{M}_d = \mathbf{r} + \mathbf{v}_{tm} t_{go} \\ \mathbf{M}_\parallel = (\mathbf{M}_d \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|^2) \\ \mathbf{M}_\perp = \mathbf{M}_d - (\mathbf{M}_d \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|^2) \\ \mathbf{a}_c = (N/t_{go}^2) \mathbf{M}_\perp \\ \mathbf{r}_t(k+1) = \mathbf{r}_t(k) + \mathbf{v}_t(k) dt \\ \mathbf{v}_t(k+1) = \mathbf{v}_t(k) + \mathbf{a}_t dt \\ \mathbf{r}_m(k+1) = \mathbf{r}_m(k) + \mathbf{v}_m(k) dt \\ \mathbf{v}_m(k+1) = \mathbf{v}_m(k) + (N/t_{go}^2) \mathbf{M}_\perp dt$$

صورة 16: محاكاة 3D للملاحة التناسبية²⁵3.7. الملاحة بتوجيه خط البصر²⁶

يعتبر تتبع الصاروخي الموجه عملية ديناميكية للغاية، كما أن الظروف التي تحدد مدى اقتراب الصاروخ من الهدف تتغير بشكل مستمر، وأحيانا بمعدل مرتفع جدا. ولتحقيق هذه الغاية فإن مستشعر التوجيه يقوم بقياس واحد أو أكثر من معالم مسار الصاروخ بالنسبة للهدف، وبناءً على قياسات المستشعر إنه هناك حاجة إلى عملية منطقية لتحديد تصحيحات مسار الرحلة المطلوبة. هذه العملية المنطقية تسمى قانون التوجيه. و الهدف من قانون التوجيه هو جعل الصاروخ يقترب قدر الإمكان من الهدف.

²⁶ LOS or Beam Rider²⁵ Proportional Navigation

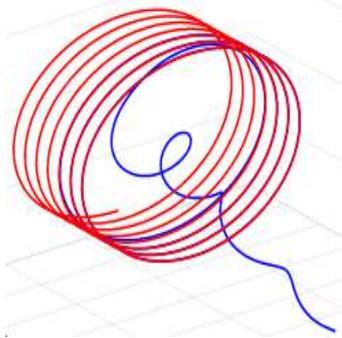
كل هذه الأدوات والتقنيات تعمل معاً لتمكين نظام الصاروخ الموجة من حساب تسارع الهدف بدقة، مما يساعد على تحسين فعالية التوجيه و زيادة احتمالية إصابة الهدف بنجاح. و مما يبين قوة و فعالية قانون القيادة المقترح هو تعلقه بتسارع الهدف و سرعته مما يزيد في دقة الإصابة. و مما يزيد الامر وضوحاً أنه يمكن استعمال كل من التقنيات السابقة لتوفير المعلومات الكافية عن حركة الهدف ثم دمجها في قانون القيادة، مما يفضي الى مطاردة مباشرة وذكية. يجدر التنويه أن هذه الطريقة صالحة أيضاً للمسيرات و الطائرات دون طيار.

Algorithm: (6)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_m \text{ and } \mathbf{v}_{tm} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_m \\ \mathbf{v}_c &= -d\mathbf{r}/dt = -\mathbf{v}_{tm} \\ \mathbf{v}_m &= \|\mathbf{v}_m\|; \mathbf{v}_c = \|\mathbf{v}_c\|; r = \|\mathbf{r}\| \\ \mathbf{a}_c &= \left\{ k \frac{\mathbf{a}_t}{r} - \frac{\mathbf{v}_m \mathbf{v}_c}{r^2} \right\} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}_m}{r} \mathbf{v}_c \\ \mathbf{r}_t(k+1) &= \mathbf{r}_t(k) + \mathbf{v}_t(k) dt \\ \mathbf{r}_m(k+1) &= \mathbf{r}_m(k) + \mathbf{v}_m(k) dt \\ \mathbf{v}_m(k+1) &= \mathbf{v}_m(k) + \mathbf{a}_c dt \\ k &= k + 1 \end{aligned}$$

سيناريوهات التتبع عن طريق التوجيه المقترح (Proposed 3D Pure Pursuit): في محاكاتها هذه يطلق الصاروخ الموجه من منصة إرسال بسرعة ابتدائية مقدار شعاعها هو $\mathbf{v}_M(t_0) = [0 \ 914.4 \ 0] \text{ [m/s]}$ انطلاقاً من النقطة $\mathbf{P}_M(t_0) = [0 \ 0 \ 3048] \text{ [m]}$ بغرض استهداف طائرة تقع في الموضع $\mathbf{P}_T(t_0) = [0 \ 12192 \ 3048] \text{ [m]}$ وشعاع سرعتها الابتدائية هو A_T حيث $w = 3$ و $A_T = 6 \times 9.81$ تحت الشروط أو الظروف التالية $K = 20$; $k = 1$; $K = 20$; $dt = 0.001$; تسارع الطائرة يعطى بالعلاقة:

$$A_T(t) = A_T[\sin(\omega t) \ 0 \ \cos(\omega t)], \text{ [m/s}^2\text{]}$$



صورة 18: محاكات ثلاثية الأبعاد لاشتباك الصاروخ مع الهدف بالتوجيه المقترح

4. المساهمة: قانون التوجيه المقترح (Proposed 3D Pure Pursuit)

في هذا القسم الأخير نقترح نسخة جديدة من الملاحة بالمطاردة المباشرة ثلاثية الأبعاد، و على عكس الملاحة التقليدية من هذه النسخة المحدثة، فإن شعاع التوجيه المفروض على الصاروخ يتكيف مع اتجاه الهدف ويحاكيه، و في الوقت نفسه يفرض قانون القيادة على الصاروخ أن يحافظ على طولية تسارعه و المتناسب مع التسارع المستهدف. فهذا أقتراح التسمية الآتية: "الملاحة التناسبية للمطاردة المباشرة". يتم التحقيق في صحة وأداء خوارزمية التوجيه المقترحة من خلال التحليل الرياضي-النظري والمحاكاة العددية.

دعنا نبدأ بحساب تسارع الصواريخ \mathbf{a}_m من الصيغة المعروفة للملاحة الكلاسيكية للمطاردة المباشرة

$$\mathbf{a}_m = \left\{ \frac{dv_m}{dt} \right\} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{v_m}{r^2} \left[r \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) - \mathbf{r} \left(\frac{dr}{dt} \right) \right] \Leftarrow v_m(\mathbf{r}/r) = \mathbf{v}_m$$

لذلك سيكون تسارع الصاروخ

$$\mathbf{a}_m = \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{dv_m}{dt} \right) - \frac{v_m v_c}{r^2} \right\} \mathbf{r} - \frac{v_m}{r} \mathbf{v}_c \quad (26)$$

حيث أن $\mathbf{v}_c = -d\mathbf{r}/dt = \text{closing velocity}$ في هذه العبارة المحصل عليها، هناك بعض التعقيد و هو صعوبة حساب (dv_m/dt) ، لأنه عند حساب القيمة الشعاعية \mathbf{a}_m نحتاج أولاً إلى المقدار السلمي (dv_m/dt) و الذي يعسر توفيره عادة، لذلك من أجل التغلب على هذه المشكلة نفترض أن $[dv_m/dt]$ يتناسب مع التسارع المستهدف $: dv_m/dt = ka_t$

$$\mathbf{a}_c = \left\{ k \frac{\mathbf{a}_t}{r} - \frac{v_m \mathbf{v}_c}{r^2} \right\} \mathbf{r} - \frac{v_m}{r} \mathbf{v}_c \quad (27)$$

حيث أن $k = \text{proportionality constant}$. يتم التحكم في الصواريخ بواسطة أجهزة أوتوماتيكية قائمة بذاتها تسمى مقياس التسارع²⁷ التي تقيس التسارع بالقصور الذاتي. و في التحكم بالصواريخ، يقوم هذا الجهاز بقياس التسارع الرأسي و الجانبي و الطولي للصاروخ الذي يتم التحكم فيه. يتم حساب تسارع الهدف في أنظمة الصواريخ الموجهة باستخدام مجموعة من التقنيات و الأدوات المدمجة التي تعمل بالتوازي لتحقيق دقة عالية في التعقب و الإصابة. من بين هذه التقنيات:

- رادار البحث والتتبع
- مرشح كالمان
- الذكاء الاصطناعي
- مستشعرات القصور الذاتي

Algorithm: (7)

Initiation:

$$\mathbf{r}_t(t_0) = \mathbf{r}_{t0}; \quad \mathbf{r}_m(t_0) = \mathbf{r}_{m0}; \quad \mathbf{v}_m(t_0) = \mathbf{v}_{m0};$$

$$K_1 = \text{const}_1; \quad K_2 = \text{const}_2; \quad K_3 = \text{const}_3;$$

while $e > \text{tole}$

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{f}(\mathbf{a}_t, t); \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_m; \quad \mathbf{v}_{tm} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_m;$$

$$\mathbf{v}_c = -\mathbf{v}_{tm}; \quad r = \|\mathbf{r}\|; \quad v_m = \|\mathbf{v}_m\|;$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}_m; \quad \text{Sliding surface}$$

$$\mathbf{a}_c = \left\{ K_1 \mathbf{r} - \left(\frac{v_m}{r} \right) \mathbf{v}_c \right\} - \left\{ \frac{K_2}{r^2} \|\mathbf{s}\|^{K_3} \text{sgn}(\mathbf{s}) \right\} \times \mathbf{r};$$

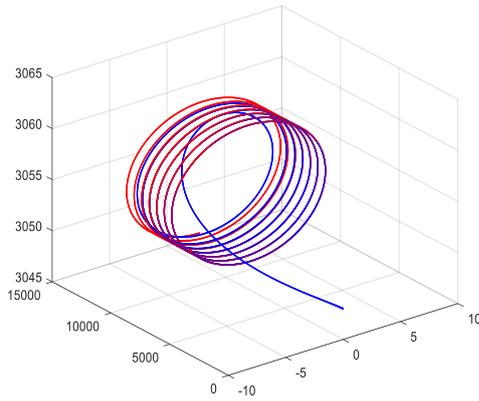
$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_t + \mathbf{v}_t dt; \quad \mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m + \mathbf{v}_m dt;$$

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_m + \mathbf{a}_c dt; \quad t = t + dt; \quad k = k + 1;$$

$$e = \|\mathbf{r}\|; \quad \text{Miss distance}$$

end

سيناريوهات التتبع لوضع الانزلاق PP : الآن، نكرر نفس التجربة كما في السابق، ولكن هذه المرة مع إضافة بعض الضوضاء إلى بيانات الباحث (أي في شكل ضوضاء بيضاء غاوسية) يسمح لنا هذا بتقييم قوة الطريقة المقترحة ضد الاضطرابات وتقييم كفاءة الخوارزمية المقترحة.



صورة 19: محاكاة ثلاثية الأبعاد لاشتباك الصاروخ مع الهدف بالتوجيه (3D-SPP)

تثبت نتائج خوارزمية التوجيه هذه دقة استثنائية، حيث تحقق أدنى حد من مسافة الخطأ و الاعتراض السريع. كما تحافظ على التتبع الدقيق حتى في البيئات الصاخبة، و تتنبأ بفعالية بمناورات الهدف. و يعكس هذا الأداء استراتيجيات تحكم متقدمة قادرة على محاذاة مسار الصاروخ بسرعة مع مسار الهدف، مما يضمن التتبع الأمثل في السيناريوهات الديناميكية. لكي نقوم بمحاكاة شاملة للصاروخ نعرض النموذج الديناميكي الكلي و الذي يعطى بجملة المعادلات التفاضلية الآتية [22].

تكمّن قوة قانون القيادة المقترح في استخدام سرعة الهدف وتسارعه، وتحسين دقة الإصاابة. و من خلال استخدام التقنيات المدمجة السابقة الذكر، فإنه يضمن أن الطريقة المقترحة ستلاحق الهدف بشكل مثالي، كما أنها قابلة للتطبيق على الطائرات بدون طيار والمركبات الجوية غير المأهولة. الآن و لمزيد من تحسين أداء و فعالية القانون المقترح دعنا نختار متعدد الشعب $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}_m$ كسطح منزلق. فإن مشتق هذا السطح سيكون $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}_m + \mathbf{r} \times \mathbf{a}_m$ لكن توجيهات التتبع الخالصة تفرض الشرط $\mathbf{v}_m = (v_m/r)\mathbf{r}$ فذلك

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v}_m + \mathbf{r} \times \mathbf{a}_m = \frac{v_m}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}_m$$

$$= \mathbf{r} \times \left\{ \mathbf{a}_m - \frac{v_m}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\} = \mathbf{r} \times \left\{ \mathbf{a}_m + \frac{v_m}{r} \mathbf{v}_c \right\}$$

يكون شرط التقارب مضمونا إذا اقتربت حالة النظام الديناميكي أخيراً من السطح المنزلق. و من أجل الحصول على هذا الشرط، دعونا نفرض دالة ليابونوف التالية: $V(\mathbf{x}) = \mathbf{s}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x}) / 2 = \|\mathbf{s}(\mathbf{x})\|^2 / 2$ أي نختارها كمرشح لدالة ليابونوف حيث $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}^T(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ وبواسطة نظرية ليابونوف يقال إن النظام مستقر إذا فقط إذا كان: $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ و عليه إذا اخترنا السطح $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ بحيث يكون مشتقه من الشكل $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = -K \cdot \text{sign}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))$ حيث K مصفوفة موجبة بالتحديد، فإن شرط سالبية مشتق الطاقة:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}^T(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{s}^T(\mathbf{x}) \cdot K \cdot \text{sign}(\mathbf{s}(\mathbf{x})) \leq 0$$

هو محقق دائماً.

الآن، نحاول اختيار التسارع \mathbf{a}_m بواسطة خدعة ذكية لإجبار $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ على أن تكون بالشكل المتوقع $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = -K_2 \cdot \text{sign}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))$. أولاً، نفترض أن \mathbf{a}_m يتكون من ثلاثة حدود $\mathbf{a}_m = \mathbf{a}_{m1} + \mathbf{a}_{m2} + \mathbf{a}_{m3}$ حيث تم تحديد \mathbf{a}_{m1} للإلغاء $(v_m \dot{\mathbf{r}}/r)$ وتم تحديد \mathbf{a}_{m2} لإبطال حاصل الضرب المتجهي و بالتالي $\mathbf{a}_{m2} = K_1 \cdot \mathbf{r}$ و يتم تحديد الحد الأخير $\mathbf{a}_{m3} = (K_2/r^2) \cdot \mathbf{r} \times \text{sign}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))$ إجماع التسارعات المذكورة أعلاه التي حصلنا عليها

$$\mathbf{a}_m = \left\{ K_1 \cdot \mathbf{r} - \left(\frac{v_m}{r} \right) \mathbf{v}_c \right\} + \left(\frac{K_2}{r^2} \right) \mathbf{r} \times \text{sign}(\mathbf{s}(\mathbf{x})) \quad (28)$$

لتعزيز التقارب في المشاركة المقترحة وضعنا

$$\mathbf{a}_m = \left\{ K_1 \cdot \mathbf{r} - \left(\frac{v_m}{r} \right) \mathbf{v}_c \right\} - \left(\frac{K_2}{r^2} \right) \|\mathbf{s}\|^{K_3} \text{sign}(\mathbf{s}) \times \mathbf{r} \quad (29)$$

حيث $\mathbf{v}_c = -d\mathbf{r}/dt$ و $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}_m$

الانزلاق الجانبي β على النحو التالي $u = V_M \cos \alpha \cos \beta$ و $w = V_M \sin \alpha \cos \beta$ و $v = V_M \sin \beta$ لذلك علينا أن نكتب

$$\alpha(t) = \tan^{-1}\left(\frac{w}{u}\right); \quad \beta(t) = \sin^{-1}\left(\frac{v}{V_M}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v}{V_{uv}}\right)$$

حيث $V_{uv} = \sqrt{u^2 + v^2}$ وتعرف زاوية التتبع $\alpha(t)$ هي الزاوية بين وتر الجناح واتجاه الهواء المار عليه. الزاوية $\beta(t)$ تسمى زاوية الانزلاق الجانبي. في بعض الأحيان نحتاج إلى تعريف زاوية التتبع الكلية على أنها $\alpha_t = \cos^{-1}(\cos \alpha \cos \beta)$ وذلك لغرض تبسيط الحسابات.

بافتراض أن عزم القصور الذاتي يتغير خطياً مع الكتلة، يتم تحديث عزم القصور الذاتي باستخدام العلاقة

$$I(t) = I_0 - (I_0 - I_{b0})\Delta m(t)$$

حيث:

$$\Delta m(t) = (m_0 - m(t))/(m_0 - m_{b0})$$

$I_0 = \text{diag}([I_{x0} \ I_{y0} \ I_{z0}])$ هو عزم القصور الذاتي عند إطلاق الصاروخ،

$I_{b0} = \text{diag}([I_{xb} \ I_{yb} \ I_{zb}])$ هو عزم القصور الذاتي عند الاحتراق،

$I(t) = \text{diag}([I_x \ I_y \ I_z])$ هو عزم القصور الذاتي اللحظي

m_{b0} هي كتلة الصاروخ عند الاحتراق،

m_0 هي كتلة الصاروخ لحظة الإطلاق.

يتم تصحيح الدفع للضغط الجوي المحيط P_a وفقاً للعلاقة:

$$F_p(t) = \dot{m}_e I_{sp} + (P_{ref} - P_a)A_e = F_{p_{ref}} + (P_{ref} - P_a)A_e$$

حيث P_a الضغط الجوي المحيط، و P_{ref} الضغط المحيط المرجعي [Pa]. يتغير موقع مركز الكتلة خطياً مع الكتلة. يتم تحديث موقع مركز الكتلة x_{cm} باستخدام:

$$x_{cm}(t) = x_{cm_0} - (x_{cm_0} - x_{cm_{b0}})\Delta m(t)$$

حيث

x_{cm_0} هي المسافة اللحظية من مركز الكتلة إلى أنف الصاروخ و $x_{cm_{b0}}$ هي مقدار x_{cm} عند لحظة الإطلاق و x_{cm} مقدار x_{cm} عند الاحتراق. و t هوال زمن الذي تتم فيه المحاكاة، $0 < t < t_b$ و t_b وقت الاحتراق. في أغلب الصواريخ، يتم توجيه مقدار الدفع F_p على طول المحور x_b (خط وسط الصاروخ). بعد ذلك، تكون مكونات شعاع الدفع F_p المعبر عنها في إطار مرجع الجسم هي $F_p = F_p(t)\mathbf{i}_b + 0\mathbf{j}_b + 0\mathbf{k}_b$ أما شعاع عزم الدفع M_p فهي $M_p = 0\mathbf{i}_b + \ell_p F_{p_z}\mathbf{j}_b - \ell_p F_{p_y}\mathbf{k}_b$ يتم حساب المسافة ℓ_p من مقدمة الصاروخ إلى مركز الكتلة الحالي x_{cm} كما

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}(t) = F_x(t)/m(t) - (q(t)w(t) - r(t)v(t)), \\ \dot{v}(t) = F_y(t)/m(t) - (r(t)u(t) - p(t)w(t)), \\ \dot{w}(t) = F_z(t)/m(t) - (p(t)v(t) - q(t)u(t)), \\ \dot{p}(t) = [L(t) - q(t)r(t)(I_z(t) - I_y(t))]/I_x(t), \\ \dot{q}(t) = [M(t) - p(t)r(t)(I_x(t) - I_z(t))]/I_y(t), \\ \dot{r}(t) = [N(t) - p(t)q(t)(I_y(t) - I_x(t))]/I_z(t), \\ \dot{\phi}(t) = p(t) + (q(t)\sin(\phi) + r(t)\cos(\phi))\tan(\theta), \\ \dot{\theta}(t) = q(t)\cos(\phi) - r(t)\sin(\phi), \\ \dot{\psi}(t) = (q(t)\sin(\phi) + r(t)\cos(\phi))/\cos(\theta). \\ \dot{x} = [c_\phi c_\psi]u + [s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi]v + [c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi]w \\ \dot{y} = [c_\theta s_\psi]u + [s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi]v + [c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi]w \\ \dot{z} = -[s_\theta]u + [s_\phi c_\theta]v + [c_\phi c_\theta]w \end{array} \right.$$

with $c_\phi = \cos \phi$; $c_\theta = \cos \theta$; $c_\psi = \cos \psi$
 $s_\phi = \sin \phi$; $s_\theta = \sin \theta$; $s_\psi = \sin \psi$

$F_x; F_y; F_z$ هي حصيللة القوة المؤثرة على الجسم في اتجاه المحاور الثلاث و هذه الحصيللة متكونة من القوى الأيروديناميكية و قوى الدفع و قوى الجاذبية،

$$\mathbf{F}_{\text{Total}} = F_x \mathbf{i}_b + F_y \mathbf{j}_b + F_z \mathbf{k}_b = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_G; N; M; L$$

هي حصيللة العزوم المؤثرة على الجسم حول المحاور الثلاث و هذه الحصيللة متكونة من العزوم الأيروديناميكية و عزوم الدفع و عزوم الجاذبية

$$\mathbf{M}_{\text{Total}} = L\mathbf{i}_b + M\mathbf{j}_b + N\mathbf{k}_b = \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_G$$

$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_b + y\mathbf{j}_b + z\mathbf{k}_b$ هو شعاع الموضع،

$\mathbf{v}_m = u\mathbf{i}_b + v\mathbf{j}_b + w\mathbf{k}_b$ هو شعاع السرعة الخطية،

$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i}_b + q\mathbf{j}_b + r\mathbf{k}_b$ هو متجه السرعة الزاوية.

أما الزوايا الثلاث (θ, ϕ, ψ) فهي زوايا أويلر بحيث θ : زاوية الميل - $Pitch$ و تشير إلى دوران الصاروخ حول المحور العرضي y و تُحدد ميل مقدمة الصاروخ لأعلى أو لأسفل، ϕ : زاوية اللف أو التدحرج -

$Roll$ و تشير إلى دوران الصاروخ حول المحور الطولي x و تُحدد ميل

الأجنحة بالنسبة للأفق. ψ : زاوية الانحراف Yaw و تشير إلى دوران

الصاروخ حول المحور العمودي z و تُحدد اتجاه أنف الصاروخ بالنسبة

للشمال (الدوران الأفقي). الإحداثيات x, y, z تمثل موقع مركز كتلة

الصاروخ في فضاء ثلاثي الأبعاد، و تُعبر عن موقع الصاروخ في

نظام القصور الذاتي. $m(t)$ الكتلة اللحظية للصاروخ و تعطى بالعلاقة

$$m(t + \Delta t) = m(t) - F_{p_{ref}}(t) \cdot \Delta t / I_{sp}$$

الأتومسفاري مقاسة عند مستوى سطح البحر، $I_{sp} = v_{re}$ الدفع النوعي

للووقود [N.s/kg]. في المعلم المثبت بالجسم، تُعطى طولية سرعة

الصاروخ بالمعادلة $V_M = [u^2 + v^2 + w^2]^{1/2}$ و يمكن كتابة

المكونات u و v و w بدلالة سرعة الصاروخ V_M و زاوية التتبع α و

$C_{n\delta} \delta_y$ ، و نظراً لكونه من المفترض أن يكون للصاروخ تناظر تعامدي، فإنه

$$\begin{aligned} C_{n\beta} &= C_{m\alpha}, & C_{n_r} &= C_{m_q}, & [\text{rad}^{-1}](\text{deg}^{-1}) \\ C_{n\delta} &= C_{m\delta}, & C_{n_\beta} &= C_{m_\alpha}, & [\text{rad}^{-1}](\text{deg}^{-1}) \end{aligned}$$

يتم حساب المعاملات المقابلة لمكونات القوة العمودية في المحورين z_b و y_b بواسطة $C_{N_z} = F_{A_z b}/QS$ و $C_{N_y} = F_{A_y b}/QS$ علماً أن Q هو معامل الضغط الديناميكي، [باسكال]. المصطلح $Q = 0.5\rho V^2$ هو مقدار مهم جداً، يعرف باسم معامل الضغط الديناميكي الذي يساوي الطاقة الحركية لكل وحدة حجم من الهواء. سيتم تقديم شكلين متكافئين من Q هنا: $Q = 0.5\rho V^2 = 0.7\rho P_a M_N^2$ حيث M_N رقم ماخ و P_a الضغط الجوي. كما يمكن حساب رقم ماخ بواسطة صيغة أخرى $M_N = V_M/V_S$ حيث V_S هي سرعة الصوت. من جهة أخرى، يقاس رقم رينولدز $Re = \rho V d/\mu$ نسبة القوى القصورية إلى قوى اللزوجة في تدفق السوائل و هو لا يقل أهمية عن الماخ. حيث، d هو طول المرجع الديناميكي الهوائي، V هي سرعة الجسم، μ هي اللزوجة الديناميكية الجوية، و ρ هي الكثافة الجوية. يمثل d عادةً طول أو قطر الصاروخ، مما يؤثر على خصائص التدفق. و للمعلومية فإن معاملات القوة هي دوال بدلالة رقم رينولدز. في التطبيقات التي تتوفر فيها بيانات الغلاف الجوي المقاسة على ارتفاع واحد أو ارتفاعات قليلة h ، يتم نمذجة الغلاف الجوي في محاكاة الطيران باستخدام المعادلات التي تستقرئ أو تستكمل البيانات وفقاً للمبادئ المعروفة للتغير الجوي مع h هذه المعادلات هي

$$\begin{aligned} T &= T_1 + a(h - h_1), [\text{K}]. & P &= P_1 + (T/T_1)^{-g_0/(aR)}, [\text{Pa}] \\ \rho &= P/(RT), [\text{kg/m}^3]. & V_s &= \sqrt{\gamma RT}, [\text{m/s}] \end{aligned}$$

حيث a هو معدل التناقص الحراري²⁸ $[K/m]$ و ρ كثافة الهواء، و g_0 قيمة تسارع الجاذبية عند سطح الأرض، h الارتفاع عن مستوى سطح البحر، و h_1 الارتفاع المرجعي (مستوى سطح البحر أو سطح الأرض)، P الضغط عند الارتفاع h ، P_1 الضغط عند الارتفاع المرجعي h_1 ، T درجة الحرارة عند ذلك الارتفاع، T_1 درجة الحرارة عند الارتفاع المرجعي، V_s سرعة الصوت عند الارتفاع h ، γ نسبة السعات الحرارية³⁰.

يتم حساب قوة الجاذبية المعبر عنها بإحداثيات المعلم المرتبط بالجسم عن طريق ضرب المتجه \mathbf{F}_g بالمصفوفة التي تتحول من إطار الأرض إلى إطار الجسم: $\mathbf{F}_G = m(t)g(-s_\theta \mathbf{i}_b + s_\phi c_\theta \mathbf{j}_b + c_\phi c_\theta \mathbf{k}_b)$ يمكن إسقاط القوة الديناميكية الهوائية الكلية الناتجة \mathbf{F}_A على الصاروخ في أي إطار إحداثي لإعطاء ثلاثة مكونات متعامدة.

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} F_L \sin \alpha_t - F_D \cos \alpha_t \\ -v(F_D \sin \alpha_t + F_L \cos \alpha_t)/\sqrt{v^2 + u^2} \\ -w(F_D \sin \alpha_t + F_L \cos \alpha_t)/\sqrt{v^2 + u^2} \end{bmatrix}$$

حيث أن قوى السحب والرفع و القوة الجانبية هي $F_D = 0.5\rho V^2 C_D S$ و $F_L = 0.5\rho V^2 C_L S$ و $F_S = 0.5\rho V^2 C_Y S$ و العزوم الأيروديناميكية هي $\mathbf{M}_A = L_A \mathbf{i}_b + M_A \mathbf{j}_b + N_A \mathbf{k}_b$ حيث $L_A = 0.5\rho V^2 C_l S d$ و $M_A = 0.5\rho V^2 C_m S d$ و $N_A = 0.5\rho V^2 C_n S d$. للعلم، فإن C_D ، C_L و C_m هما على التوالي معامل الرفع الديناميكي الهوائي و معامل السحب الديناميكي الهوائي، ρ الكثافة الجوية القياسية عند مستوى سطح البحر، V سرعة الجسم، سرعة الهواء بالنسبة للجسم، مقدار متجه السرعة \vec{v} ، C_l معامل عزم الدوران $Roll$ الديناميكي الهوائي حول مركز كتلة الصاروخ، C_m معامل عزم الانحدار $Pitch$ الديناميكي الهوائي حول مركز كتلة الصاروخ C_n معامل عزم الانحراف Yaw الديناميكي الهوائي حول مركز الكتلة، S المساحة المرجعية الأيروديناميكية، d طول مرجعي ديناميكي هوائي للجسم.

يتم إعطاء المعاملات الديناميكية الهوائية بواسطة:

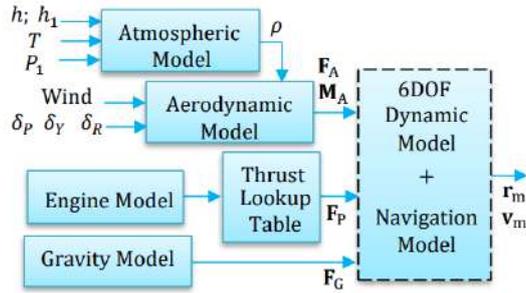
$$\begin{aligned} C_D &= C_{D_0} + k C_L^2 \\ C_L &= C_{L_\alpha} \alpha \\ C_l &= C_{l_\delta} \delta_r + \frac{d}{2V} (C_{l_p} p) \\ C_m &= C_{m_{\text{ref}}} - C_{N_z} \left(\frac{x_{cm} - x_{\text{ref}}}{d} \right) + \frac{d}{2V} (C_{m_q} + C_{m_\alpha}) q \\ C_n &= C_{n_{\text{ref}}} + C_{N_y} \left(\frac{x_{cm} - x_{\text{ref}}}{d} \right) + \frac{d}{2V} (C_{n_r} + C_{n_\beta}) r \end{aligned}$$

كما يتم حساب مكونات الميل والانحراف للعزم الأيروديناميكي حول مركزه باستخدام $C_{m_{\text{ref}}} = C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_\delta} \delta_p$ و $C_{n_{\text{ref}}} = C_{n_\beta} \beta +$

³⁰ Ratio of Specific Heats

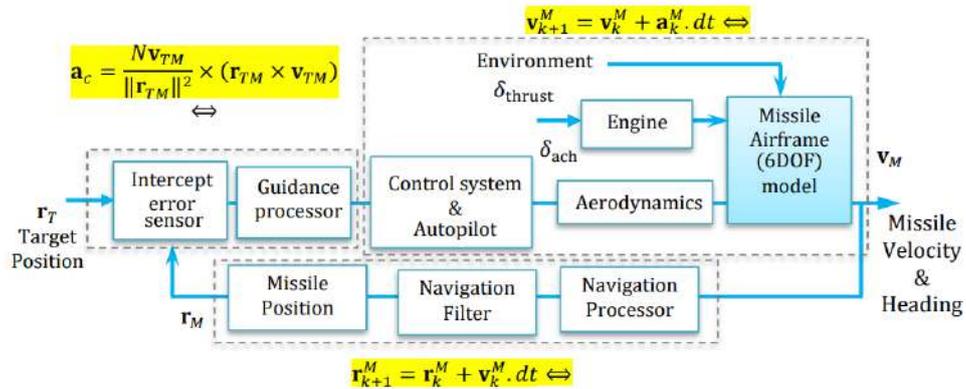
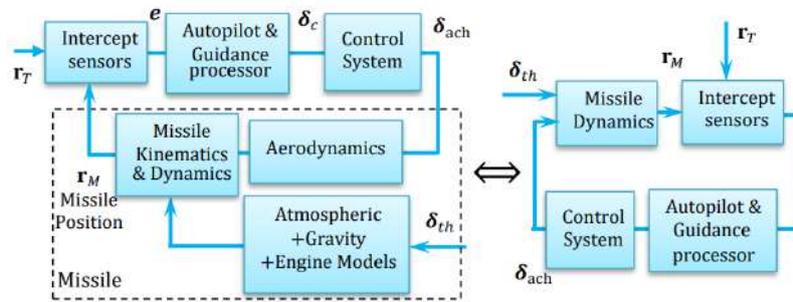
²⁸ Lapse Rate

²⁹ (Gas Constant 287.05) [N. m]/(kg. K)



صورة 20: المخطط الصندوقي البيئي للأنظمة الفرعية في نموذج الصاروخ

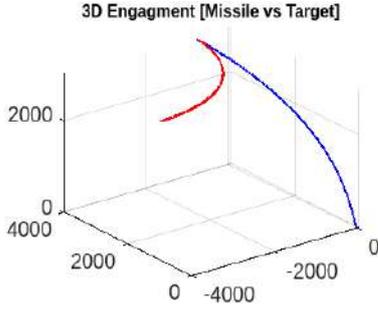
في الشكل الموضح أدنا تخطيط بياني يوضح الدارة الكاملة للصاروخ.



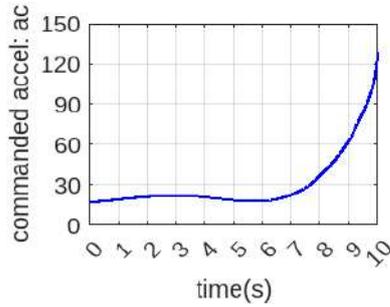
من موقع إطلاق الصاروخ. في لحظة إطلاق الصاروخ، يكون الهدف في الداخل على مسافة نزولية تبلغ 4 كم من موقع الإطلاق. يقتصر وقت المحاكاة على 8 ثوانٍ، لأننا نحتاج إلى 7.6 ثانية على الأكثر لتدمير الهدف. وكملاحظة نهائية نذكر أننا استعملنا خوارزمية تحسين السرب الجزيئي³¹ وذلك في كل نوع من أنواع التوجيه التي أدرجناها لكي تكون المقارنة المطلوبة في أرقى صورها.

بالنسبة للمثال المدروس في هذه الورقة البحثية، يُفترض فيه أن ارتفاع الصاروخ في موضع الإطلاق يكون عند مستوى سطح البحر؛ وبالتالي، فإن ارتفاع الصاروخ فوق مستوى سطح البحر، للاستخدام في جداول الغلاف الجوي، يُعطى بواسطة $h = -P_M(3)$ وهو المركبة الثالثة من P_M في إطار الأرض. الهدف يخلق على ارتفاع 3 كم و بسرعة 250 م/ث، و مسار طيران الهدف منحنى و منحرف جانبيًا على بعد 1 كم

³¹ PSO Particle Swarm Optimization



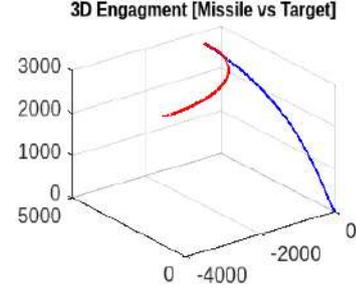
صورة 23: مسارات الصواريخ/الأهداف للعبة Pure Pursuit D3



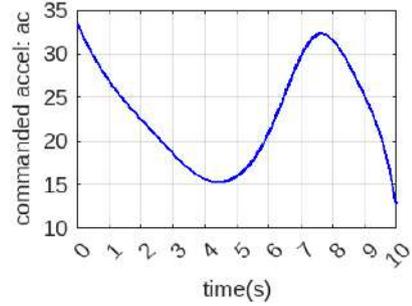
صورة 24: تسريع موجه عند استعمال ال-3D المثلالي Pure Pursuit

من شكل مسار الرحلة (الصورة 23) يمكننا أن نرى أن خط الرؤية مماس لمسار الصاروخ في كل لحظة أثناء الرحلة حتى نقطة الاعتراض (أو بالأحرى عند الاقتراب الأكثر)، حيث تكون مسافة الخطأ تساوي 0.1497 م في وقت قدره $t = 7.5070$ ثانية. هذا هو هندسة التوجيه الملاحقة الخالصة حيث تشير سرعة الصاروخ دائماً نحو الهدف. في الصورة 24 نلاحظ أن التسارع المطلوب في بداية المطاردة له قيم مقبولة 25 م/ث²، ثم في النهاية يزداد إلى قيم كبيرة جداً 150 م/ث². هذا في الواقع أمر مقلق لأنه يتطلب طاقة كبيرة جداً و قد لا يكون جسم الصاروخ قادراً على التعامل مع هذه المتطلبات. لحل هذه المشكلة، سنرى استجابة الخوارزمية المحسنة لهذا الإصدار.

أ. الملاحة النسبية المثلى بواسطة ZEM



صورة 21: مسارات الصواريخ بمطاردة الهدف باستعمال التوجيه ZEM-PN



صورة 22: تسارع موجه للحصول على أفضل أداء ل- ZEM-PN

توضح الصورة 21 مسارات الصاروخ/الهدف أثناء الرحلة، واعتراضهما في صورة ثلاثية الأبعاد. و كما نرى في هذا الشكل، فإن القاذفة موجهة مباشرة نحو الهدف في وقت الإطلاق، و يتسبب توجيه ZEM-PN في دوران الصاروخ في اتجاه يقود الهدف كما هو مطلوب لضرب هدف متحرك. تبدأ مناورة الصاروخ هذه عند تشغيل التوجيه (0.5 ثانية). في هذا الوقت المبكر من الرحلة، تكون سرعة الصاروخ بطيئة، مما يتسبب في المبالغة في تقدير مقدار المناورة. و مع اكتساب الصاروخ للسرعة، يتم تصحيح مسار رحلة الصاروخ حتى الاعتراض مع الهدف عند $t = 7.4275$ ثانية مع مسافة الخطأ تساوي 0.1612 متر كما نرى في نتيجة المحاكاة. يكون التسارع المطلوب (انظر الشكل 22) مقبولاً و يبدأ بقيم معقولة و يبقى قريباً من هذا الطلب، و هذا يعكس متطلبات الطاقة الأقل لتوجيه الصاروخ.

ب. التوجيه الأمثل المقترح للمطاردة النقية ثلاثية الأبعاد:

قدرًا كبيرًا من الطاقة. من ناحية أخرى، نلاحظ أن الضوضاء لا تؤثر على التحكم على الإطلاق.

الجدول أسفله يبرز مقارنة بين النتائج الثلاثة من حيث زمن أقرب اقتراب ومسافة الخطأ.

الجدول 1
مقارنة نتائج المحاكاة

	ZEM Guidance	3D-PP Guidance	3D-PP Silding Guidance
M_d	0.1612 [m]	0.1497 [m]	0.1598 [m]
t_{cap}	7.4275 [s]	7.5070 [s]	7.3853 [s]

يُظهر أمر المطاردة الخالصة ثلاثية الأبعاد المقترح تتبعًا جيدًا (حتى في بيئة صاخبة)، و يسجل أقل مسافة خطأ في أقصر وقت، و بالتالي فهو قانون التوجيه الأكثر قوة. كما أن الأمر إلى خط البصر له نتائج جيدة في مسافة الخطأ، حتى أنه استغرق وقتًا أطول من الطريقتين الأخرين. حقق أمر 3D-PP نتائج مقبولة بسبب استخدام المكاسب المحسنة (إنه فعال في استراتيجية التحكم الخاصة به و لكنه يستهلك المزيد من الطاقة مقارنة بالطرق الأخرى. يوضح الجدول أيضًا أن ZEM سجل أقل مسافة خطأ، بينما سجل التوجيه بالمطاردة 3D-PP أقصر وقت لأقرب اقتراب.

5. خاتمة

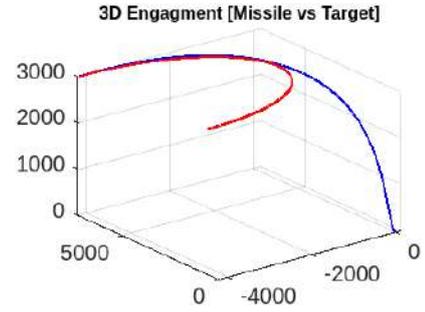
في هذه الدراسة، تم تطوير خوارزمية جديدة لاعتراض الأهداف بصواريخ أرض-جو، مع التركيز على المطاردة الخالصة المعززة بالتحكم في وضع الانزلاق. أظهرت الخوارزمية أداءً جيدًا، حيث أظهرت تحسينات كبيرة على الطرق الحالية من حيث وقت الاقتراب الأقرب و المتانة للضوضاء. تنفيذها بسيط، و يتطلب الحد الأدنى من الطاقة و التكلفة.

كشف التحليل المقارن مع الخوارزميات السالفة عن نتائج متفوقة، مما يجعل النهج المقترح فعالاً و عملياً للتطبيقات في العالم الحقيقي. يضع هذا العمل أساساً متيناً للبحوث المستقبلية في أنظمة التوجيه و التحكم، مما يعد بدقة و موثوقية معززة.

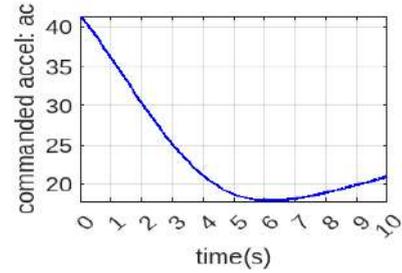
المصادر

- [1] Jerger, J.J. *Systems Preliminary Design*. U.S. Naval Air Development Center. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1960, 625p.
ISBN 10: [1258411385](https://www.isbn-international.org/number/1258411385) / ISBN 13: [9781258411381](https://www.isbn-international.org/number/9781258411381)

ج. اقتراح الملاحقة المثلى للانزلاق ثلاثي الأبعاد:



صورة 25: مسارات الصواريخ/الأهداف باستخدام التوجيه 3D Sliding-PP



صورة 26: تسريع موجه عند استعمال الـ 3D Sliding-PP

من خلال أشكال المحاكاة أعلاه، قمنا بتوضيح تأثير التوجيه المقترح على تطور مسار الطيران أثناء وقت المحاكاة. يتم تنفيذ هذه الطريقة بسهولة ويمكن الحصول على أداء التتبع الأمثل المطلوب من خلال اختيار مكاسب وحدة التحكم بشكل مناسب باستخدام خوارزمية تحسين السرب الجزيئي³².

$$\mathbf{a}_c = \left\{ K_1 \cdot \mathbf{r} + \left(\frac{v_m}{r} \right) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\} - \left(\frac{K_2}{r^2} \right) \|\mathbf{s}\|^{K_3} \tanh(\mathbf{s}) \times \mathbf{r}$$

إن استخدام الدالتين $\tanh(\cdot)$ أو $\text{sat}(\cdot)$ بدلاً من $\text{sgn}(\cdot)$ في معادلة التسارع الجانبي ساعد في تقليل التذبذبات، و تقليل الاهتزازات وتحسين استقرار النظام وأدائه في أنظمة التحكم في وضع الانزلاق. توضح الصورة 25 المسارين للصواريخ و الهدف و نقطة اعتراضهما في الوقت $t=7.3853$ ثانية مع مسافة الخطأ = 0.1598 متر. و من الصورة 26 يمكننا أيضًا ملاحظة أن التسارع المطلوب ليس مرتفعًا بشكل مفرط. يبدأ مرتفعًا نسبيًا ثم ينخفض نحو نهاية المطاردة، و يستقر عند قيمة تقريبا هي في المجال $22 < |\mathbf{a}_c| < 20$. يشير هذا إلى أن وحدة التحكم لا تتطلب

³² Particle Swarm Optimization

- [20] Lukenbill, Francis C.(1990) *A Target Missile Engagement Scenario Using Classical Proportional Navigation*. Master of Science in Electrical Engineering. Naval Postgraduate School, Monterey, California
- [21] Air Training Command. United States Air Force & technical staff [of] Aero Publishers, Inc. (1960) *Fundamentals of Guided Missiles*. Aero Publishers, Inc. Los Angeles, California, 575p. <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015004467075&seq=9>
- [22] Bekhiti, B.(July 12, 2024) *Advanced Strategies for Guidance & Control of Surface-Air Missiles*, LAP Lambert Academic Publishing. 108p. ISBN-13: 978-620-7-84341-1, ISBN-10: 620784341X.
- [2] Bureau of Naval Personnel. *Principles Of Guided Missiles and Nuclear Weapons*.1966.Officer Candidate School, NAVPERS 10784-A, 370p. <https://archive.org/details/PrinciplesOfGuidedMissilesAndNuclearWeapons/mode/2up>.
- [3] Locke Arthur, S. *Guidance: Principles Of Guided Missile Design*.1955.Grayson Merrill, U.S. Naval Air Development Center, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J.
- [4] Garnell, P. and East, D.J. *Guided Weapon Control Systems*. Pergamon Press Inc. Maxwell House, Royal Military College of Science, New York 10523, U.S.A.1977.
- [5] U.S. Army Missile Command. *Military Handbook: Missile Flight Simulation, Part One, Surface-To-Air Missiles*.MIL-HDBK-1211(MI) 17 July 1995. http://everyspec.com/MIL-HDBK/MIL-HDBK-1000-1299/MIL_HDBK_1211_2041/
- [6] Mohan, S.R.(2016) *Fundamentals of Guided Missiles*. Defense Research and Development Organization, New Delhi. <https://drdo.gov.in/drdo/monograph/fundamentals-guided-missiles>
- [7] Shneydor N.A. *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control*. Israel Institute of Technology, Coll House, Westergate, Chichester, West Sussex, PO20 6QL England, 1998.<https://archive.org/details/missileguidancep0000shne>
- [8] George M. Siouris. *Missile guidance and control systems*. Springer-Verlag New York , Inc , 2004. ISBN 0-387-00726-1. <https://doi.org/10.1007/b97614>
- [9] Zaikang, Qi, et Lin Defu. *Design of Guidance and Control Systems for Tactical Missiles*.1st Edition, CRC Press Taylor & Francis Group, 2019, <https://doi.org/10.1201/9780429291203>.
- [10] Morley Frederick Bernhart. *Curves of Pursuit and Curves of General Pursuit*. University of Oklahoma, Scripta Math 1957-1959.
- [11] Harold, T. Davis. *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. United States Atomic Energy Commission 1960.
- [12] Morley, F.V.(1921) A Curve of Pursuit. *The American Mathematical Monthly*, 28 (2), 54–61. <https://doi.org/10.1080/00029890.1921.11986002>
- [13] Krishnan, S. *Pursuit Course in Aerial Gunnery*. Defense Science Organization, Ministry of Defense, New Delhi. 1956
- [14] Shinar, J. and Gutman, S.(1980) *Three-Dimensional Optimal Pursuit and Evasion with Bounded Control*. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25 (3), 492-496. [doi: 10.1109/TAC.1980.1102372](https://doi.org/10.1109/TAC.1980.1102372)
- [15] Puckette, C.C.(1953) The Curve of Pursuit, *The Mathematical Gazette*, 37 (322), 256-260.[doi:10.2307/3610038](https://doi.org/10.2307/3610038)
- [16] Bureau of Naval Weapons, *Weapons Systems Fundamentals: Analysis of Weapons*. NAVWEPS OP 3000 (Volume 2), Washington, 1963.
- [17] Charles, T. Myers. *Guided Missiles Operations, Design and Theory*. McGraw-Hill Book Company, Inc, New York Toronto London 1958. 575p. <https://catalog.hathitrust.org/Record/001622285/Home>
- [18] Yanushevsky, R. (2018). *Modern Missile Guidance*.2nd Edition, CRC Press, Taylor & Francis Group. <https://doi.org/10.1201/9781351202954>.
- [19] Zarchan, P. (2019) *Tactical and Strategic Missile Guidance*. American Institute of Astronautics and Aeronautics, Inc., Washington, DC, USA. <https://doi.org/10.2514/4.105845>.